

ВЫПУСК

95

Библиотечка КВАНТ

МАТЕМАТИКА

ВЫПУСК

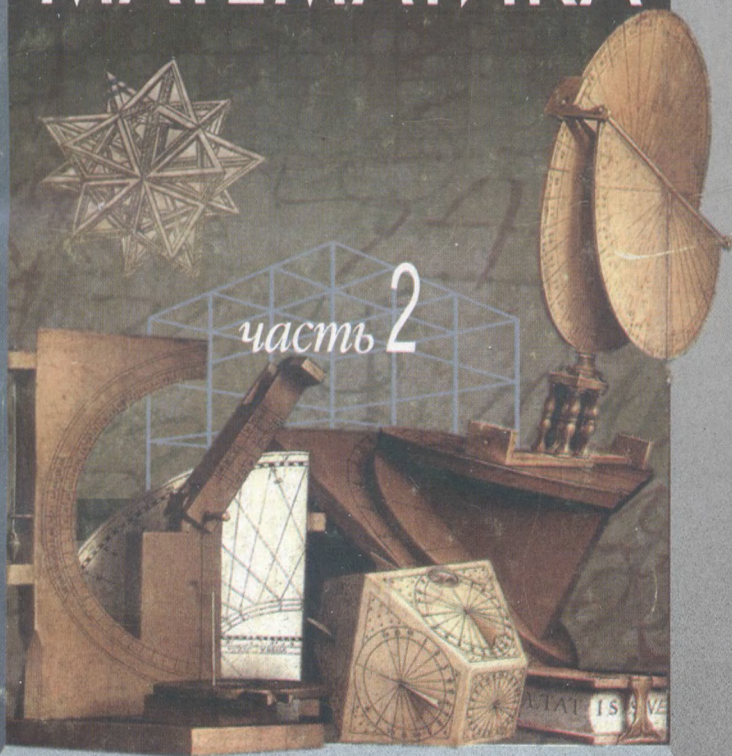
Библиотечка КВАНТ



Задачник «Кванта»

МАТЕМАТИКА

часть 2



Б Ю Р О



КВАНТУМ



БИБЛИОТЕЧКА

КВАНТ

В Ы П У С К

95

Приложение к журналу
«Квант» №3/2006

Задачник «Кванта»

МАТЕМАТИКА

часть 2

Под редакцией Н. Б. Васильева



Москва

2006

УДК 51(07671)
ББК 22.1
3-90

Серия
«Библиотечка «Квант»
основана в 1980 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, В.Л.Гинзбург,
Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов, С.С.Кротов,
С.П.Новиков, Ю.А.Осипьян (председатель),
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов,
А.И.Черноуцан (ученый секретарь)

3-90 Задачник «Кванта». Математика. Часть 2 / Под редакцией
Н.Б.Васильева. – М.: Бюро Квантум, 2006. – 144 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 95. Приложение к журналу «Квант» № 3/2006.)

ISBN 5-85843-060-0

В книге собраны задачи по математике из раздела «Задачник «Кванта» за период с 1983 по 1994 год. Задачи трудные, большинство из них гораздо труднее упражнений из школьных учебников и абитуриентских пособий. Многие задачи предлагались на олимпиадах различного уровня. Почти ко всем задачам даются краткие указания или ответы.

Для увлеченных математикой старшеклассников, преподавателей школ, лицеев и гимназий, руководителей математических кружков и факультативов, а также для всех любителей решать трудные задачи.

ББК 22.1

ISBN 5-85843-060-0

© Бюро Квантум, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Условия задач	5
1983 год	5
1984 год	16
1985 год	25
1986 год	34
1987 год	43
1988 год	51
1989 год	61
1990 год	70
1991 год	79
1992 год	87
1993 год	96
1994 год	100
Указания и ответы к задачам	106

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге представлен один из важнейших разделов журнала «Квант» – «Задачник «Кванта». Он возник в первом номере 1970 года и сохранился практически в неизменном виде до сегодняшнего дня. В каждом номере журнала публикуются новые задачи, решения которых предлагается прислать читателям, а затем через некоторое время в журнале приводятся решения этих задач. Организовал раздел (его математическую часть) и руководил им в течение почти 30 лет (до последних дней своей жизни) Николай Борисович Васильев, замечательный математик, внесший неоценимый вклад в дело математического просвещения.

Надо сказать, что задачи «Задачника «Кванта», за редким исключением, трудные. Многие из них рассчитаны на длительную работу, но есть и такие, которые предлагалось решить за ограниченное время на различных конкурсах и олимпиадах (городские олимпиады Москвы и Санкт-Петербурга, Всероссийские, Всесоюзные и Международные олимпиады). Большая часть задач – оригинальные, некоторые из них содержат темы для небольших научно-исследовательских работ по элементарной, а в отдельных случаях и не совсем элементарной, математике. Среди авторов задач были и замечательные математики, входившие в состав редколлегии «Кванта» и активно сотрудничавшие с журналом, и школьники, некоторые из которых впоследствии стали специалистами с мировой известностью.

В этой книге собраны задачи по математике из «Задачника «Кванта» за период с 1983 по 1994 год. Немногие очень трудные задачи или задачи, для решения которых необходимы знания, не входящие в школьный курс (даже математических классов), отмечены значком *. К большинству задач даются указания и ответы (авторы – Н.Б.Васильев и Ю.П.Лысов). В скобках после номера задачи указано, где опубликовано ее решение: например, скобка (8–87) означает 8-й номер журнала за 1987 год. Указания очень краткие и рассчитаны скорее на то, чтобы направить размышления знатоков, чем на обучение начинающих.

Надеемся, что книга доставит немало приятных минут любителям решать трудные задачи. Желаем успеха!

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1983 ГОД

781. Постройте прямую, параллельную стороне AC данного треугольника ABC и пересекающую его стороны AB и BC в таких точках D и E соответственно, что $AD = BE$.

782. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел равна 30030, то их произведение не делится на 30030.

783. а) При каком наибольшем n система неравенств

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ 2 < x^2 < 3, \\ 3 < x^3 < 4, \\ \dots\dots\dots \\ n < x^n < n+1 \end{cases}$$

имеет решения?

б) Для каких n существуют такие две прогрессии – арифметическая $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ и геометрическая $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, что

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \dots < a_n < b_n < a_{n+1}?$$

784. Шарообразная планета движется по окружности вокруг звезды и вращается вокруг своей оси, причем ось суточного вращения наклонена к плоскости орбиты под углом α (для нашей Земли $\alpha = 66,5^\circ$). Найдите зависимость продолжительности T самого короткого дня в году в данном пункте на поверхности планеты от географической широты φ этого пункта. (Движение планеты по орбите считается очень медленным по сравнению с вращением.) Напишите формулу для функции $T = T(\varphi)$ и начертите примерный график.

785. а) Про возрастающую последовательность положительных чисел $a(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, известно, что для любого натурального числа $k > 1$ существует число b_k такое, что $a(kn) \leq b_k a(n)$ при всех n . Докажите, что существуют положительные числа c и α , для которых $a(n) \leq cn^\alpha$ при всех $n \geq 1$.

Останется ли верным это утверждение, если в условии:

б) слово «любого» заменить на «некоторого»;

в) не требовать, чтобы последовательность $a(n)$ была возрастающей?

786. Докажите, что для любых натуральных n и k (больших 1) число n^k можно представить в виде суммы n последовательных нечетных чисел. (Например, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$; $7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$; $3^4 = 25 + 27 + 29$.)

787. Найдите отношение сторон прямоугольного треугольника, если известно, что одна половина гипотенузы (от вершины до середины гипотенузы) видна из центра вписанной окружности под прямым углом.

788. а) На графике $y = x^2$ отмечены точки $A(a; a^2)$ и $B(b; b^2)$. Найдите между ними точку $M(m; m^2)$, для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM , наименьшая.

б) На графике дифференцируемой функции $y = f(x)$ отмечены точки A и B . Известно, что график и отрезок AB ограничивают выпуклую фигуру. Пусть M — точка графика, расположенная между A и B , для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM , наименьшая. Докажите, что касательная к графику в точке M параллельна хорде AB .

789. а) Десять точек, делящие окружность на 10 равных дуг, попарно соединены пятью хордами. Обязательно ли среди них найдутся хорды одинаковой длины?

б*) Сто точек, делящие окружность на 100 равных дуг, попарно соединены 50 хордами. Докажите, что среди них обязательно найдутся две хорды одинаковой длины.

790. а) Про числовую функцию f известно, что если $|x - y| = 1$, то $|f(x) - f(y)| = 1$. Верно ли, что при любых x и y будет выполнено равенство $|f(x) - f(y)| = |x - y|$?

Пусть про отображение F плоскости в себя известно, что любые две точки X, Y , находящиеся на расстоянии 1, оно переводит в две точки $F(X), F(Y)$, также находящиеся на расстоянии 1:

$$\rho(X, Y) = 1 \Rightarrow \rho(F(X), F(Y)) = 1.$$

Тогда для любых двух точек X, Y плоскости

$$\rho(X, Y) = \rho(F(X), F(Y)),$$

т.е. отображение F сохраняет расстояние. Докажите следующие утверждения, из которых вытекает эта теорема: для любых X, Y

б) $\rho(F(X), F(Y)) \leq \rho(X, Y) + 1$;

$$в*) \rho(X, Y) = \sqrt{3} \Rightarrow \rho(F(X), F(Y)) = \sqrt{3};$$

$$г*) \rho(F(X), F(Y)) \leq \rho(X, Y);$$

$$д*) \rho(F(X), F(Y)) \geq \rho(X, Y).$$

(Вы можете, конечно, предложить и другой план доказательства теоремы.)

791. Петя подарили микрокалькулятор, на котором можно выполнять следующие операции: по любым данным числам x и y вычислить $x + y$, $x - y$, $x + 1$ и $1/x$ (при $x \neq 0$). Петя утверждает, что с помощью своего микрокалькулятора он может:

а) возвести любое число в квадрат, проделав не более шести операций;

б*) перемножить любые два числа, проделав не более двадцати операций.

Как он это делает?

792. Решите в натуральных числах уравнения:

$$а) 3^x + 1 = 2^y; \quad б) 3^x - 1 = 2^y.$$

в*) Найдите все натуральные n , при которых оба числа $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ выражаются конечными десятичными дробями.

г) Докажите, что при любом простом $p > 3$ и натуральном $m > 1$ ни одно из чисел $p^m + 1$ и $p^m - 1$ не может быть степенью двойки.

793*. Из вершины P тетраэдра $PABC$ проводятся три отрезка PA' , PB' , PC' , перпендикулярные граням PBC , PCA , PAB и равные по длине площадям этих граней соответственно (направления отрезков выбираются так, что точки A' и A , B' и B , C' и C лежат по разные стороны плоскостей соответствующих граней PBC , PCA , PAB (рис.1). Докажите, что:

а) повторив это же построение для тетраэдра $PA'B'C'$ (и его вершины P), мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному тетраэдру $PABC$ с коэффициентом $3V/4$, где V – объем тетраэдра $PABC$;

б) вектор $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'}$ перпендикулярен плоскости ABC .

в) Из точки O , взятой внутри тетраэдра $ABCD$, опускаются перпендикуляры на плоскости его граней. На этих перпендикулярах от точки O откладываются отрезки, равные по длине площадям соответствующих граней, и концы этих отрезков

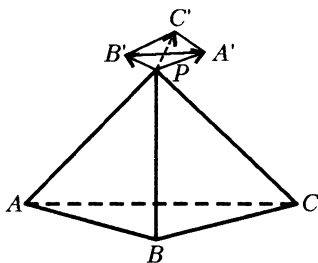


Рис. 1

принимаются за вершины нового тетраэдра $A'B'C'D'$. (Разумеется, с точностью до параллельного переноса, этот тетраэдр не зависит от выбора точки O .) Докажите, что, повторив это построение для тетраэдра $A'B'C'D'$, мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному с коэффициентом $3V$, где V – объем исходного тетраэдра $ABCD$. (Если $3V = 1$, то последний тетраэдр получается из исходного параллельным переносом.)

794. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку K первой окружности проведены прямые KA и KB , пересекающие вторую окружность в точках P и Q (рис.2).

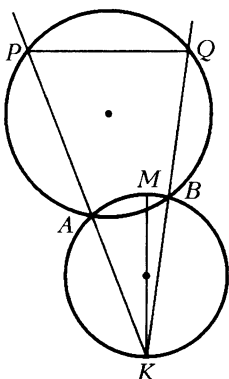


Рис. 2

Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

795. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех делителей натурального числа n (рис.3). Докажите, что существует бесконечно много n таких, что: а) $\sigma(n) > 2n$; б) $\sigma(n) > 3n$.

Докажите, что для любого n : в*) $\sigma(n) < n(\log_2 n + 2)$; г) $\sigma(n) < n(\ln n + 1)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18

Рис. 3

796. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$ так, что $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите $\angle APB$.

797*. Известно, что последними цифрами квадратов целых чисел могут быть лишь цифры 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Верно ли, что перед последней цифрой в них может встретиться любая группа цифр, т.е. что для любого набора из n цифр a_1, a_2, \dots, a_n можно найти целое число, квадрат которого оканчивается цифрами $a_1 a_2 \dots a_n b$, где b – одна из перечисленных выше цифр?

798*. На окружности отметили $4k$ точек и раскрасили их попеременно в красный и синий цвета; затем $2k$ красных точек произвольным образом соединили попарно k красными отрезками, а $2k$ синих – k синими отрезками (никакие три отрезка не пересекаются в одной точке). Докажите, что найдется по крайней мере k точек пересечения красных отрезков с синими.

799. а) Найдите одно решение уравнения $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$ и докажите, что у него нет других решений.

6*) Найдите два решения уравнения $3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$ и докажите, что у него нет других решений.

800*. а) На плоскости отмечены все точки с целочисленными координатами – узлы квадратной решетки, и среди них выделен один «начальный» узел O . Для каждого из остальных узлов P проведена прямая, относительно которой узлы O и P симметричны, – серединный перпендикуляр к отрезку OP . Проведенные прямые разбивают плоскость на мелкие части (треугольники и выпуклые многоугольники). Припишем каждой из них натуральное число – *ранг* – по следующему правилу: часть, содержащая точку O (она имеет форму квадрата), получает ранг 1; части, граничащие с ней по стороне, – ранг 2; части, граничащие с ними по стороне (и отличные от уже рассмотренных), – ранг 3 и так далее (рис.4). Докажите, что суммарная площадь всех частей ранга r одна и та же при всех натуральных r .

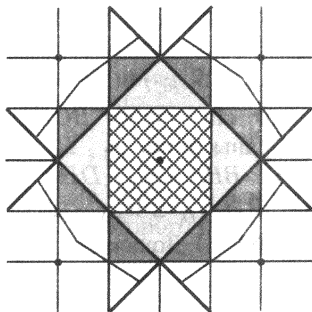


Рис. 4

б) Верно ли аналогичное утверждение для произвольной решетки из параллелограммов (в частности, из ромбов с углом в 60°); для решетки из правильных шестиугольников?

в) Сформулируйте и докажьте аналогичное утверждение для кубической решетки в пространстве.

801*. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{n} \right] + \left[\sqrt[3]{n} \right] + \left[\sqrt[4]{n} \right] + \dots + \left[\sqrt[n]{n} \right] = \\ = \left[\log_2 n \right] + \left[\log_3 n \right] + \left[\log_4 n \right] + \dots + \left[\log_n n \right] \end{aligned}$$

($[x]$ обозначает целую часть числа x).

802. На сторонах AB и BC треугольника ABC как на гипотенузах построены вне его прямоугольные треугольники APB и BQC с одинаковыми углами величины β при их общей вершине B (рис.5). Найдите углы треугольника PQK , где K – середина стороны AC .

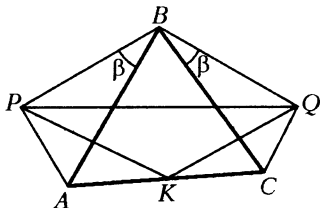


Рис. 5

803. Сумма двух рациональных чисел x и y – натуральное

число, сумма обратных к ним чисел $1/x$ и $1/y$ – тоже натуральное число. Какими могут быть x и y ?

804. Точка O – середина оси прямого кругового цилиндра, A и B – диаметрально противоположные точки окружности нижнего основания цилиндра, C – некоторая точка окружности верхнего основания, не лежащая в плоскости OAB . Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла $OABC$ (с вершиной O) равна 2π .

805*. а) На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC выбраны точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} \leq S_{ABC}/4$.

б) На гранях BCD , CDA , BDA , ABC тетраэдра $ABCD$ выбраны точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 соответственно так, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $V_{A_1B_1C_1D_1} \leq V_{ABCD}/27$.

806. а) Докажите, что если

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} = 0,$$

то многочлен $a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1$ имеет корень между 0 и 1.

б) Докажите, что если для некоторого $p > 0$

$$\frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2} + \frac{a_3}{p+3} + \dots + \frac{a_n}{p+n} = 0,$$

то этот многочлен также имеет корень между 0 и 1.

807. а) Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1 , MK_2 , MK_3 на его стороны. Докажите, что сумма векторов $\overline{MK_1} + \overline{MK_2} + \overline{MK_3}$ равна $\frac{3}{2}\overline{MO}$, где O – центр треугольника.

б) Из произвольной точки M опущены перпендикуляры MK_1 , MK_2 , ..., MK_n на все стороны правильного n -угольника (или их продолжения). Докажите, что

$$\overline{MK_1} + \overline{MK_2} + \dots + \overline{MK_n} = \frac{n}{2}\overline{MO},$$

где O – центр n -угольника.

в) Из произвольной точки M внутри правильного тетраэдра опущены перпендикуляры MK_1 , MK_2 , MK_3 , MK_4 на его

грани. Докажите, что

$$\overline{MK_1} + \overline{MK_2} + \overline{MK_3} + \overline{MK_4} = \frac{4}{3} \overline{MO},$$

где O — центр тетраэдра.

808. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает какую-нибудь клетку в красный цвет, второй окрашивает k (неокрашенных) клеток в синий цвет, затем снова первый окрашивает одну (неокрашенную) — в красный, второй — k клеток в синий и так далее. Первый стремится к тому, чтобы четыре какие-нибудь красные клетки расположились в вершинах квадрата (со сторонами, параллельными линиям сетки). Сможет ли второй ему помешать: а) при $k = 1$; б*) при $k = 2$; в*) при каком-либо $k > 1$?

809. Найдите сумму $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$.

810*. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник M можно поместить прямоугольник, площадь которого не меньше $1/4$ площади многоугольника M .

811. Пусть h_a, h_b, h_c — высоты, а m_a, m_b, m_c — медианы остроугольного треугольника (проведенные к сторонам a, b, c), r и R радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите, что

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}.$$

812. Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

813. Даны отрезки OA, OB, OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC). На них как на диаметрах построены окружности (рис. 6). Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O , равна половине площади (обычного) треугольника ABC .

814. Отметим в натуральном ряду числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Среди отмеченных

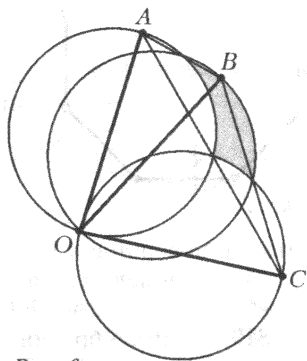


Рис. 6

чисел встречаются тройки последовательных чисел, например $72 = 6^2 + 6^2$, $73 = 8^2 + 3^2$, $74 = 7^2 + 5^2$.

а) Объясните, почему не могут встретиться четыре последовательных отмеченных числа.

Докажите, что среди отмеченных чисел встретится бесконечно много:

б) пар; в*) троек последовательных чисел.

815*. На окружности расставлены $4k$ точек, занумерованных в произвольном порядке числами $1, 2, \dots, 4k$.

а) Докажите, что эти точки можно соединить $2k$ попарно пересекающимися отрезками так, что разность чисел в концах каждого отрезка не превосходит $3k - 1$.

б) Постройте пример расстановки номеров, показывающий, что число $3k - 1$ в пункте а) нельзя заменить меньшим.

816. Натуральные числа a и b получаются друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что:

а) суммы цифр чисел $2a$ и $2b$ равны;

б) суммы цифр чисел $a/2$ и $b/2$ равны (если a и b четные);

в) суммы цифр чисел $5a$ и $5b$ равны.

817. Точка K лежит на стороне BC треугольника ABC . Докажите, что соотношение

$$AK^2 = AB \cdot AC - KB \cdot KC$$

выполнено тогда и только тогда, когда $AB = AC$ или $\angle BAK = \angle CAK$.

818. Пусть какие-то k вершин правильного n -угольника белые (остальные вершины — черные). Будем называть множество белых вершин *равномерным*, если при любом m количества белых вершин в любых двух наборах из m последовательных вершин n -угольника совпадают или отличаются на 1 (на рисунке 7 приведен пример равномерного множества для $n = 8$, $k = 5$).

а) Постройте равномерные множества для $n = 12$, $k = 5$; $n = 17$, $k = 7$.

Докажите, что равномерное множество существует и единственно (с точностью до поворотов n -угольника):

б) если n делится на k ;

в*) для любых n и k ($k \leq n$).

819. В Швамбрании n городов, каждые два из которых соединены дорогой. (Дороги сходятся лишь в городах, все

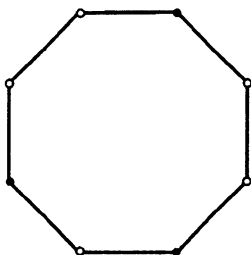


Рис. 7

пересечения организованы на разных уровнях.) Злой волшебник намеревается установить на каждой дороге одностороннее движение так, что, выехав из любого города, в него уже нельзя будет вернуться. Докажите, что:

- а) волшебник может это сделать;
- б) при этом найдется город, из которого можно добраться до всех других, и найдется город, из которого нельзя выехать;
- в) существует $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ способов осуществить намерение злого волшебника.

820*. а) Правильный восьмиугольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы два прямоугольника.

б) Правильный $4k$ -угольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы k прямоугольников.

в) Найдите суммарную площадь прямоугольников из пункта б), если длина стороны $4k$ -угольника равна 1.

821. Решите уравнение $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$.

822. Карточки четырех цветов — n зеленых, n красных, n синих и n желтых — сложены стопкой так, что через четыре карточки цвет повторяется (например, 1-я, 5-я, 9-я, ... карточки — красные, 2-я, 6-я, ... — желтые и так далее). Несколько карточек сверху сняли, не перекадывая перевернули и произвольным образом вставили между оставшимися (рис.8). После этого стопу разделили на n маленьких стопок по четыре карточки. Докажите, что в каждой из этих четверок встретятся карточки всех четырех цветов.

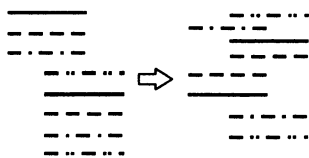


Рис. 8

823. С фотографии срисован (рис.9) контур дома длиной 60 м и шириной 15 м, причем более длинная стена на фотографии — слева (остальные части контура на фотографии загорожены веткой дерева). Требуется:

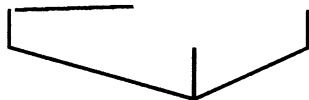


Рис. 9

- а) дорисовать контур;
- б) нарисовать точную карту (проекцию на горизонтальную плоскость), на которой указать контур дома и точку съемки;
- в) определить высоту дома и высоту, с которой производилась съемка.

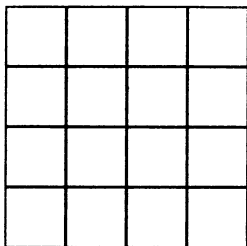


Рис. 10

824. В сетке, изображенной на рисунке 10, каждая ячейка имеет размер 1×1 . Можно ли эту сетку представить в виде объединения: а) 8 ломаных длины 5; б) 5 ломаных длины 8?

825. Множество M состоит из k попарно пересекающихся отрезков, лежащих на одной прямой. Известно, что любой отрезок длины не больше 1 можно расположить на прямой так, чтобы его концы принадлежали множеству M . Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M , не меньше $1/k$.

826. На доске написали три числа. Затем одно из них стерли и написали сумму двух других чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли первоначально быть написаны числа: а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3?

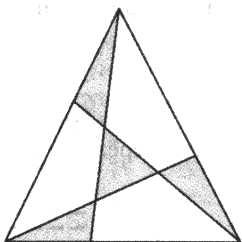


Рис. 11

827. Известно, что четыре закрашенных треугольника на рисунке 11 равновелики.

а) Докажите, что три белых четырехугольника на этом рисунке также равновелики.

б) Найдите площадь одного четырехугольника, если площадь одного тре-

угольника равна 1.

828*. Можно ли в клетках бесконечного листа клетчатой бумаги расставить целые числа так, чтобы сумма чисел в каждом прямоугольнике размером 4×6 клеток, стороны которого идут по линиям сетки, равнялась: а) 10; б) 1?

829. Докажите, что среди любых $2m + 1$ различных целых чисел, по модулю не превосходящих $2m - 1$, найдутся три числа, сумма которых равна 0.

830*. Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Выписав какое-то уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, он решает его и, убедившись, что оно имеет два корня, составляет второе уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$, в котором p_2 — это меньший, а q_2 — больший корень первого уравнения. По второму уравнению он составляет третье, если это возможно, и так далее.

а) Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго.

б) Найдите наибольшую длину конечной последовательности

квадратных трехчленов, удовлетворяющих указанному условию.

831. Пусть P и Q — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, M и N — середины диагоналей AC и BD . Докажите, что если прямые MN и PQ перпендикулярны, то $BC = AD$.

832. а) Докажите, что для любого натурального $n \geq 6$ квадрат можно разрезать на n квадратов (среди которых могут быть и квадраты одинакового размера).

б) Докажите, что для любого натурального $n \geq 100$ куб можно разрезать на n кубов.

833*. Последовательность $\{x_n\}$ задается условиями

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 - 2x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Докажите, что: а) $x_n \neq 0$ (при всех n); б) эта последовательность непериодическая.

834. Оросительная установка, расположенная в точке O , обслуживает круг радиусом 100 м с центром O . Такими установками нужно полностью оросить квадратное поле $1 \text{ км} \times 1 \text{ км}$.

а) Бригадир предложил расположить 64 установки в вершинах квадратной сетки со сторонами, параллельными краям поля (рис. 12). В каких пределах может меняться сторона a квадратной сетки?

б) Восьмиклассник Витя утверждает, что можно оросить поле с помощью лишь 46 таких установок. Прав ли Витя?

835*. На круговой шахматный турнир приехали n шахматистов из страны A и n шахматистов из страны B . Оказалось, что как бы ни разбивать шахматистов на пары (чтобы друг с другом играли шахматисты разных стран), найдется хотя бы одна пара шахматистов, которые уже встречались друг с другом. Докажите, что можно выбрать a шахматистов из страны A и b шахматистов из страны B так, что каждый из выбранных a шахматистов встречался с каждым из b шахматистов, а $a + b > n$.

836. Пусть A — одна из точек пересечения двух окружностей с

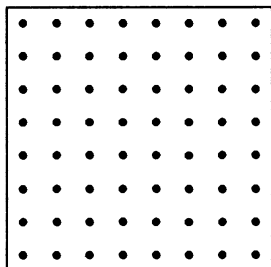


Рис. 12

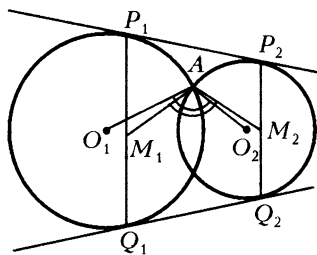


Рис. 13

центрами O_1 и O_2 , P_1P_2 и Q_1Q_2 — общие касательные, M_1 и M_2 — середины хорд P_1Q_1 и P_2Q_2 этих окружностей (рис.13). Докажите равенство углов O_1AO_2 и M_1AM_2 .

837*. Пусть a, b, c — целые положительные числа, каждые два из которых взаимно просты. Докажите, что наибольшее из целых чисел, не представимых в виде $xbc + yca + zab$ (где x, y, z — неотрицательные целые числа), равно $2abc - ab - bc - ca$.

838. Все точки, лежащие на сторонах правильного треугольника ABC , разбиты на два множества E_1 и E_2 . Верно ли, что для любого такого разбиения в одном из множеств E_1 и E_2 найдется тройка вершин прямоугольного треугольника?

839*. Можно ли выбрать 1983 натуральных числа, не превосходящих 10^5 , так, чтобы среди выбранных чисел не было ни одной тройки чисел, составляющих арифметическую прогрессию (т.е. ни одной тройки a, b, c , в которой $a + c = 2b$)?

840*. а) Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполнено неравенство

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Выясните, в каких случаях оно обращается в равенство.

б) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

1984 ГОД

841. Докажите, что произведение длин отрезков, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной в него окружности, равно площади этого треугольника.

842. а) Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 0$, то

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

б) Величины $\angle A, \angle B, \angle C$ углов треугольника удовлетворяют условию

$$\frac{\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C}{\cos \angle A + \cos \angle B + \cos \angle C} = \sqrt{3}.$$

Докажите, что хотя бы один из углов равен 60° .

843. В вершинах треугольника ABC восстановлены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 к его плоскости по одну сторону от нее, равные по длине соответствующим высотам треугольника. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки пересечения

плоскостей ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 на плоскость ABC , попадает в центр вписанной в треугольник ABC окружности и равен по длине ее радиусу.

844. а) Докажите, что любое натуральное число a можно единственным образом представить в виде

$$a = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_n \cdot n!, \quad (1)$$

где a_k – целые числа, $0 \leq a_k \leq k$, $a_n \neq 0$.

б) Докажите, что любое рациональное число r , $0 \leq r < 1$, можно единственным образом представить в виде

$$r = \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_n}{(n+1)!}, \quad (2)$$

где b_k – целые числа, $0 \leq b_k \leq k$, $b_n \neq 0$.

в) Представьте в виде (1) число $a = 1984$ и в виде (2) число $r = 19/84$.

845*. Для каких n из n уголков, состоящих из четырех клеток 1×1 , и некоторого числа прямоугольников 4×1 (рис.14) можно составить центрально-симметричную фигуру (многоугольник на клетчатой бумаге)?

846. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей.

847. Квадрат расчерчен на $n \times n$ клеток. Двое игроков по очереди обходят по одной стороне одной клетки (дважды обходить одну и ту же сторону нельзя). Кто выиграет при правильной игре, если:

- побеждает игрок, первым построивший замкнутую линию;
- проигрывает игрок, который вынужден первым построить замкнутую линию?

848. а) Постройте график функции $f_0(x) = \|x - 1\| - 2\|x\| - 3\|$.

б) На рисунке 15 изображены графики трех «кусочно-линейных» функций f_1 , f_2 , f_3 . Запишите формулы для них

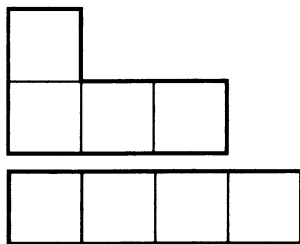


Рис. 14

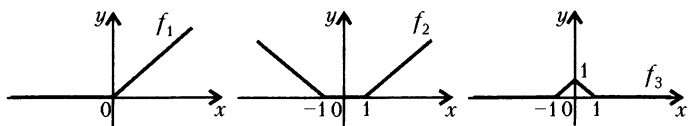


Рис. 15

виде

$$y = kx + b + c_1|x - a_1| + \dots + c_m|x - a_m|,$$

где k, b, c_i, a_i — некоторые числа, m — количество точек излома графика (a_i — абсциссы точек излома, $i = 1, 2, \dots, m$).

в) Запишите в таком же виде функцию f_0 из пункта а).

г*) Некоторая функция является комбинацией линейных функций, «модуля» и операции сложения, причем знак модуля использован в ее записи n раз (в примере а) $n = 4$). Какое наибольшее число изломов (при каждом n) может иметь ее график?

849. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, взятых в разном порядке, составлены семь семизначных чисел. Докажите, что сумма седьмых степеней нескольких из этих чисел не может равняться сумме седьмых степеней остальных чисел.

850*. Через точку пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC и отрезка, соединяющего основания двух других биссектрис, проведена прямая, параллельная стороне BC . Докажите, что длина меньшего основания образовавшейся трапеции равна полусумме длин ее боковых сторон.

851. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и AD выбраны точки P и Q так, что периметр треугольника APQ равен 2. Докажите, что $\angle PCQ = 45^\circ$.

852. Пусть x, y, z — длины сторон треугольника. Докажите, что величина

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right|$$

меньше: а) 1; б*) $1/8$.

853. Квадрат $ABCD$ вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите множество, которое описывает середина отрезка PQ , где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на неподвижную прямую l , а Q — середина стороны AB .

854. На переговорном пункте установлены автоматы для размена серебряных монет достоинством 10, 15 и 20 копеек, действующие так, как показано ниже:

20 коп. \rightarrow 15 коп., 2 коп., 2 коп., 1 коп.;

15 коп. \rightarrow 10 коп., 2 коп., 2 коп., 1 коп.;

10 коп. \rightarrow 3 коп., 3 коп., 2 коп., 2 коп.

У Пети был 1 руб. 25 коп. серебряными монетами, и он все их разменял в автоматах на медь. Вася, посчитав, сколько каких монет стало у Пети, сказал:

– А я знаю, какие у тебя были серебряные монеты!

Узнайте это и вы.

855*. Можно ли жесткий правильный тетраэдр с ребром 1 протаснуть сквозь обруч диаметром: а) 1; б) 0,95; в) 0,9; г) 0,85?

856. а) Постройте четырехугольник, зная длины его сторон и длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

б) При каких условиях задача имеет решение?

857. Среди 1984 первых натуральных чисел (от 1 до 1984) отметим те, которые можно представить в виде суммы пяти целых неотрицательных степеней двойки (т.е. пяти не обязательно различных чисел 1, 2, 4, 8, ...). Каких чисел окажется больше: отмеченных или не отмеченных?

858. Для величин α , β и γ углов некоторого треугольника выполнено соотношение $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$.

а) Найдите α , β , γ , если известно, что треугольник равнобедренный (рассмотрите все случаи).

б) Может ли треугольник быть остроугольным?

в*) Какие значения может принимать наибольший угол треугольника?

859. Найдите наименьшее положительное число a такое, что для любого квадратного трехчлена $f(x)$, удовлетворяющего при $0 \leq x \leq 1$ неравенству $|f(x)| \leq 1$, выполняется неравенство $|f'(1)| \leq a$.

860*. а) Пусть O и R – центр и радиус описанной окружности треугольника ABC , Z и r – центр и радиус его вписанной окружности, K – точка пересечения медиан треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC . Докажите, что точка Z лежит на отрезке OK , причем $OZ : ZK = 3R/r$.

б) Пусть a, b, c – длины сторон треугольника ABC , $\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c$ – единичные векторы, перпендикулярные соответствующим сторонам треугольника и направленные во внешнюю сторону (рис.16). Докажите, что

$$a^3 \vec{n}_a + b^3 \vec{n}_b + c^3 \vec{n}_c = 12S \cdot \vec{MO},$$

где S – площадь треугольника ABC , M – точка пересечения медиан, O – центр описанной окружности.

861. Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько

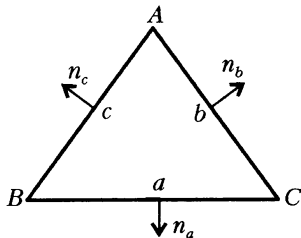


Рис. 16

(быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более чем на $1/(n+1)$.

862. а) Внутри данного правильного треугольника укажите множество всех точек M таких, что расстояния от M до его сторон сами служат длинами сторон некоторого треугольника.

б) Внутри данного правильного тетраэдра укажите множество всех точек M таких, что расстояния от M до граней тетраэдра служат длинами сторон некоторого четырехугольника.

863. В каждой клетке доски $n \times n$ стоит по фишке. Можно ли переставить их так, чтобы любые две фишки, угрожавшие друг другу ходом коня, после перестановки стали угрожать друг другу ходом короля, если: а) $n = 3$; б) $n = 6$; в) $n = 4$?

864. Назовем *красивым* разбиение треугольника на подобные ему треугольники, никакие два из которых не равны по размерам.

а) Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника существует красивое разбиение.

б*) Можно ли устроить красивое разбиение равностороннего треугольника?

в) Для каких неравносторонних треугольников существует красивое разбиение?

865. Обозначим через $[a, b]$ наименьшее общее кратное целых чисел a и b . Докажите, что для любых $n+1$ чисел $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \dots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \leq 1 - \frac{1}{2^n},$$

если: а) $n = 2$; б) $n = 3$; в*) n — любое натуральное число.

866. а) Во всех клетках квадрата 20×20 стоит по одному солдатику. Для какого наибольшего d можно переставить солдатиков в другие клетки так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше d ? (Расстояние измеряется по прямой между центрами старой и новой клеток; сторона клетки равна 1.)

Решите эту же задачу:

б) для квадрата 21×21 ;

в) для прямоугольника $m \times n$ клеток.

867. На уроке танцев 17 мальчиков и 17 девочек построили двумя параллельными рядами так, что образовалось 17 пар. При этом в каждой паре рост мальчика отличается от роста девочки не более чем на десять сантиметров. Докажите, что если в каждом ряду перестроить мальчиков и девочек по росту, то по-

прежнему в каждой паре мальчик и девочка будут отличаться по росту не более чем на десять сантиметров.

868. Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях проведены высоты. Докажите, что три прямые, соединяющие основания высот в каждой грани, параллельны одной плоскости. (Плоские углы при вершине – не прямые.)

869*. Пары последовательных натуральных чисел (8,9) и (288,289) обладают тем свойством, что каждое из этих чисел содержит любой простой множитель не менее чем во второй степени.

а) Найдите еще одну такую пару последовательных чисел.

б) Докажите, что существует бесконечно много таких пар.

870. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое конечное число пианистов. (В одной комнате может жить и несколько пианистов.) Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах – k -й и $(k+1)$ -й – приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются в $(k-1)$ -ю и $(k+2)$ -ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

871. В клетки таблицы 3×3 записывают числа 1 или -1 . Затем число в каждой клетке заменяется на произведение чисел, стоящих во всех соседних клетках (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что после нескольких повторений этой операции во всех клетках будут стоять единицы.

872. На плоскости расположены три окружности C_1 , C_2 , C_3 с радиусами r_1 , r_2 , r_3 – каждая вне двух других, причем $r_1 > r_2$ и $r_1 > r_3$. Из точки пересечения внешних касательных к окружностям C_1 и C_2 проведены касательные к окружности C_3 , а из точки пересечения внешних касательных к C_1 и C_3 – касательные к C_2 . Докажите, что последние две пары касательных образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность, и найдите ее радиус.

873. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2 + 10x + 20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору один из младших коэффициентов (коэффициент при x или свободный член), но не оба сразу. В результате получился трехчлен $x^2 + 20x + 10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?

874*. При каких целых m и n выполняется равенство:

$$а) (5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n;$$

б) $(a + b\sqrt{d})^m = (b + a\sqrt{d})^n$, где a и b ($a \neq b$) – взаимно простые натуральные числа, а $d > 1$ – натуральное число, среди делителей которого нет квадратов простых чисел?

875. По кругу вписаны $n \geq 3$ натуральных чисел, причем отношение суммы двух соседей любого из этих чисел к нему самому является натуральным числом. Докажите, что сумма всех таких отношений: а) не меньше $2n$; б*) не больше $3n$.

876. На окружности, касающейся сторон угла с вершиной O , выбраны две диаметрально противоположные точки A и B (отличные от точек касания). Касательная к окружности в точке B пересекает стороны угла в точках C и D , а прямую OA – в точке E (рис. 17). Докажите, что длины отрезков BC и DE равны.

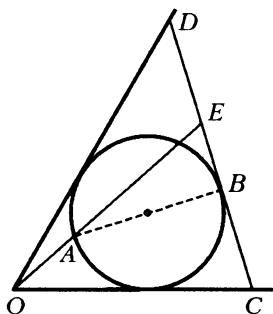


Рис. 17

877. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков размером 2×2 каждый. Докажите, что из листа можно вырезать еще один такой квадратик.

878. Докажите, что если сумма плоских углов при вершине пирамиды больше 180° , то каждое боковое ребро пирамиды меньше полупериметра ее основания.

879. Про пять целых чисел a, b, c, d, e известно, что суммы $a + b + c + d + e$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ делятся на нечетное число p . Докажите, что число

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde$$

также делится на p .

880*. В последовательности 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... каждый член, начиная с седьмого, равен последней цифре суммы шести предыдущих. Докажите, что в этой последовательности не встретятся подряд шесть чисел 0, 1, 0, 1, 0, 1.

881. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.

882. Сумма трех целых чисел a, b, c равна 0. Докажите, что число $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ – квадрат целого числа.

883. В какое наименьшее число цветов нужно раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги, чтобы:

а) любые две клетки на расстоянии 6 были покрашены в разные цвета (расстояние между клетками – наименьшее число линий сетки, горизонтальных и вертикальных, которые должна пересечь ладья на пути из одной клетки в другую);

б) любые четыре клетки, образующие фигуру в форме буквы Г (рис.18), были покрашены в четыре разных цвета?

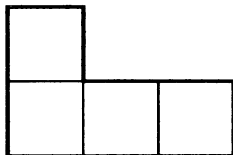


Рис. 18

884. Непрерывная и монотонная функция f определена на отрезке $[0;1]$ и принимает значения также на отрезке $[0;1]$.

Докажите, что ее график можно прокрыть n прямоугольниками с площадью $1/n^2$ каждый (стороны прямоугольников параллельны осям координат).

885*. Для каждого натурального числа n обозначим через $p(n)$ число разбиений n в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми; рис.19). Количество различных чисел в разбиении назовем его *разбросом*.

Разбиения	Разбросы
$1+1+1+1$	1
$2+1+1$	2
$2+2$	1
$3+1$	2
4	1
<hr/>	
$p(4) = 5$	$q(4) = 7$

Рис. 19

а) Докажите, что сумма $q(n)$ разбросов всех разбиений числа n равна $1 + p(1) + p(2) + \dots + p(n-1)$.

б) Докажите, что эта сумма не больше $\sqrt{2n} p(n)$.

886*. Можно ли в $4n - 4$ клеток, расположенных по периметру квадрата $n \times n$ клеток, расставить $4n - 4$ последовательных целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы суммы чисел в вершинах каждого прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата, а также суммы чисел в концах каждой диагонали равнялись одному и тому же числу s ? Решите задачу для n , равного: а) 3; б) 4; в) 5; г) 1985. Если можно, найдите допустимые значения s .

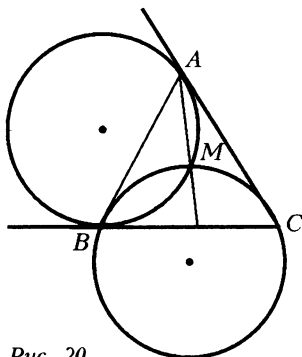


Рис. 20

887. Две касательные к окружности, SA и SB , пересекаются в точке S (A и B – точки касания; рис.20).

Вторая окружность проходит через точку C , касается прямой AB в точке B и пересекает первую окружность в точке M . Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

888. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют равенству $ab = cd$. Докажите, что число $a^{1984} + b^{1984} + c^{1984} + d^{1984}$ составное.

889. Существуют ли на плоскости такие три точки A, B, C , что для любой точки плоскости P хотя бы один из отрезков PA, PB и PC имеет иррациональную длину?

890. На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11000 км шоссейных дорог. Сможет ли она соединить сетью шоссейных дорог все свои города?

891. Окружность касается двух сторон треугольника и двух его медиан. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

892. а) Докажите, что среди чисел $2^m + 2^k$, а также среди чисел $3^m + 3^k$ бесконечно много квадратов, а среди чисел $4^m + 4^k$, $5^m + 5^k$ и $6^m + 6^k$ нет ни одного квадрата целого числа (здесь m и k — натуральные числа, $m \neq k$).

б*) Есть ли квадраты среди чисел $7^m + 7^k$?

893. Каждые два из n блоков ЭВМ соединены проводом. Можно ли каждый из этих проводов покрасить в один из $n - 1$ цветов так, чтобы от каждого блока отходило $n - 1$ проводов разного цвета, если: а) $n = 6$; б) $n = 13$?

894. а) Сумма пяти неотрицательных чисел равна 1. Докажите, что их можно расставить по кругу так, чтобы сумма пяти попарных произведений соседних чисел не превосходила $1/5$.

б*) По кругу расставлено $n \geq 4$ неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. Докажите, что сумма всех n попарных произведений соседних чисел не превосходит $1/4$.

895*. Докажите, что площадь сечения куба плоскостью, касающейся вписанной в него сферы, не превосходит половины площади грани куба. Рассмотрите случаи, когда это сечение: а) треугольник; б) четырехугольник. в) Докажите, что в случае а) площадь полной поверхности отсекаемого от куба тетраэдра меньше площади грани куба.

896. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что окружность с диаметром AB не касается прямой CD . Докажите, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.

897. Найдите хотя бы одну пару целых чисел $(x; y)$ такую,

что число $(x + y)^7 - x^7 - y^7$ делится на 7^7 , а число $(x + y)xy$ не делится на 7.

898. Для нечетных натуральных чисел $a < b < c < d$ выполнены такие условия: $ad = bc$, $a + d = 2^k$ и $b + c = 2^m$, где k и m – некоторые натуральные числа. Докажите, что:

а) $a = 1$;

б*) для каждого $m \geq 3$ существует, причем только один, набор чисел a, b, c, d, k , удовлетворяющий этим условиям.

899*. Назовем *округлением* нецелого числа x замену его на одно из двух ближайших целых чисел ($\lfloor x \rfloor$ или $\lfloor x \rfloor + 1$).

а) Докажите, что в любом равенстве

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

все нецелые слагаемые можно округлить так, что равенство останется верным.

б) В таблицу из m строк и n столбцов записаны некоторые числа, причем суммы их по строкам a_1, a_2, \dots, a_m и по столбцам b_1, b_2, \dots, b_n – целые числа. Докажите, что все нецелые числа в таблице можно округлить так, что суммы по строкам и столбцам не изменятся.

в) Пусть теперь суммы $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ не обязательно целые. Докажите, что нецелые числа в таблице можно округлить так, что суммы по строкам и столбцам будут округлением соответствующих сумм $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$.

900. Может ли проекция на плоскость выпуклого многогранника с 6 гранями быть: а) 8-угольником; б) 9-угольником? в*) Какое наибольшее число сторон может иметь проекция выпуклого многогранника с n гранями?

1985 ГОД

901. Биссектрисы AK и BM треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что если $OK = OM$, то либо углы A и B треугольника равны, либо угол C равен 60° .

902. Натуральный ряд $1, 2, 3, \dots$ разбит на несколько арифметических прогрессий. Докажите, что хотя бы у одной из этих прогрессий первый член делится на ее разность.

903. Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через вершину, является многоугольником с: а) четным; б) нечетным числом сторон?

904. Для каждого натурального числа

$$A = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0$$

(с десятичной записью $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$) положим

$$D(A) = a_n + 2a_{n-1} + \dots + 2^{n-1}a_1 + 2^n a_0.$$

Например, $D(1985) = 1 + 2 \cdot 9 + 2^2 \cdot 8 + 2^3 \cdot 5 = 91$, $D(91) = 9 + 2 \cdot 1 = 11$, $D(11) = 3$.

а) Докажите, что для любого натурального $A = A_0$ в последовательности $A_1 = D(A_0)$, $A_2 = D(A_1)$, ... встретится число $A^* = A_k < 20$, для которого $D(A^*) = A^*$.

б) Чему равно A^* для $A = 19^{85}$?

905. Докажите, что уравнение $4x^n + (x+1)^2 = y^2$ относительно натуральных чисел x и y : а) не имеет решений при $n = 1$; б) имеет по крайней мере два решения при $n = 2$; в*) имеет бесконечно много решений при $n = 2$; г*) не имеет решений для натуральных $n \geq 3$.

906. а) Докажите, что при любом натуральном $a > 1$ уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ имеет по крайней мере три решения в натуральных числах x и y .

б) Найдите число натуральных решений этого уравнения при $a = 1985$.

907. Про треугольник ABC с длинами сторон $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ известно, что $3\angle A + 2\angle B = 180^\circ$. Докажите, что $a^2 + bc - c^2 = 0$.

908. На стороне AB треугольника ABC выбирается точка P и через нее проводятся прямые, параллельные AB и AC , до пересечения со сторонами AC и BC в точках M и N соответственно. При каком выборе точки P отрезок MN имеет наименьшую длину?

Решите эту задачу: а) для треугольника с прямым углом C ; б*) для произвольного треугольника ABC .

909. а) Докажите, что существует арифметическая прогрессия из 4 различных членов, содержащая только степени натуральных чисел n^k ($k \geq 2$).

Существует ли такая прогрессия из:

б) любого конечного числа;

в) бесконечного числа членов?

Существует ли бесконечная (не постоянная) арифметическая прогрессия, не содержащая:

г) ни одной степени натурального числа;

д) ни одного числа, составленного из одинаковых цифр?

910. На сторонах правильного шестиугольника взяты точки A_1, A_2, \dots, A_6 (рис.21). Известно, что три попарно не смежные стороны шестиугольника $A_1 \dots A_6$ ($A_1 A_2, A_3 A_4, A_5 A_6$) определяют треугольник KLM , вершины которого лежат на

продолжениях диагоналей правильного шестиугольника. Докажите, что это верно и для трех других сторон шестиугольника $A_1 \dots A_6$.

911. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбираются произвольные точки E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков AF , BF , CE и DE являются вершинами выпуклого четырехугольника, причем его площадь не зависит от выбора точек E и F .

912. Докажите, что: а) многочлен x^2 ; б) любой многочлен можно представить в виде разности двух многочленов, каждый из которых является монотонно возрастающей функцией.

913. Касательные к описанной вокруг треугольника окружности, проведенные в точках A и B , пересекаются в точке P . Докажите, что прямая PC :

а) пересекает сторону AB в точке K , делящей ее в отношении $AC^2 : BC^2$;

б) симметрична медиане, проведенной из C , относительно биссектрисы угла C треугольника.

914*. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона различного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и так далее). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

915*. Докажите, что для любых положительных чисел a , b , c , d верно неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

916. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

917. а) Чему равна длина максимальной серии идущих подряд несчастливых билетов? б) Сколько существует таких серий максимальной длины? (Считается, что номера билетов изменяются от 000000 до 999999 включительно; билет называется счастливым, если сумма трех первых цифр равна сумме трех последних цифр.)

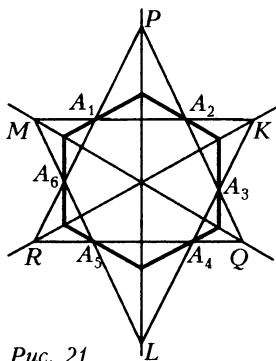


Рис. 21

918*. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон — целые числа. Докажите, что это числа 3, 4 и 5.

919. а) Докажите равенство

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx + \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \frac{\pi}{4}.$$

б*) Докажите неравенство

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4 + 1} dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4 - 1} dx < 9,0001.$$

920. а) Найдите хотя бы одно решение уравнения $x^3 + y^3 + z^3 = x^2 y^2 z^2$ в натуральных числах.

б*) Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2 y^2 z^2$ имеет натуральное решение только при $n = 1$ и $n = 3$, и найдите все эти решения.

921. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны величины двух углов $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$, а его удвоенная площадь равна $AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Найдите отношение длин всех его сторон $AB : BC : CD : DA$, если:

а) $\alpha = 5\pi/12$, $\beta = 7\pi/12$; б) $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/3$.

в) Выясните, для каких α и β существует такой четырехугольник, и выразите через α и β отношение его сторон.

922. Докажите, что уравнение $\sin^p x + \cos^q x = 1$, где p и q — положительные числа, имеет решение на интервале $0 < x < \pi/2$ тогда и только тогда, когда $(p - 2)(q - 2) < 0$ или $p = q = 2$.

923. Докажите, что площадь проекции куба с ребром 1 на любую плоскость численно равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную этой плоскости.

924. Каждые две из n точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой) соединены отрезком, и на всех отрезках расставлены стрелки. Треугольник ABC с вершинами в данных точках называется *ориентированным*, если стрелки расставлены в направлениях AB , BC , CA или AC , CB , BA (например, на рисунке 22 всего три ориентированных треугольника из 10).

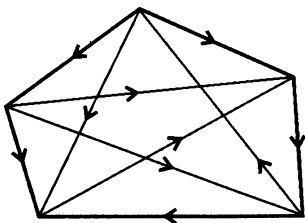


Рис. 22

а) Объясните, как расставить стрелки, чтобы не возникло ни одного ориентированного треугольника.

б*) Каково наибольшее возмож-

ное число ориентированных треугольников (для каждого n)? (Нарисуйте соответствующие примеры для $n = 4, 5$ и 6 .)

925. (Эволюция кляксы.) На белой плоскости расположена синяя фигура K_0 . Из нее получается новая синяя фигура K_1 по следующему правилу, применяемому одновременно ко всем точкам M плоскости: если не менее половины площади круга радиусом 1 с центром в точке M занято синим цветом, то точка M становится синей, а если менее половины — то белой. На следующем шаге из полученной синей фигуры K_1 по тому же правилу получается фигура K_2 , затем из нее — K_3 и так далее. Докажите, что: а) для произвольной ограниченной фигуры K_0 , начиная с некоторого шага, вся плоскость станет белой; б) если K_0 — круг радиусом 100, то это случится не позже чем через миллион шагов.

926. Докажите, что если $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ и $xu + yv = 0$, то $x^2 + u^2 = y^2 + v^2 = 1$ и $xu + yv = 0$.

927*. На плоскости дано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проведены несколько отрезков с концами в данных точках. Эти отрезки разрешается менять. Если какие-то два из них, AC и BD , пересекаются, их можно стереть и провести: а) отрезки AB и CD ; б) отрезки AB и BC . (Если «новый» отрезок уже проведен, проводить его во второй раз не нужно.) Можно ли после нескольких таких замен (только по правилу а) или только по правилу б), но не по обоим) вернуться к исходному набору отрезков?

928. В кинотеатре $N + 1$ место. Вначале N человек, имеющие билеты с указанием своего места, в их числе и Игорь, сели на произвольные N мест, не глядя на свои билеты. Пришедший последним $(N + 1)$ -й зритель хочет занять свое место; если оно занято — сгоняет сидящего там, тот поступает так же и так далее, пока нужное согнанному место не окажется свободным. Какова вероятность того, что Игорю придется пересесть? (Другими словами, какую долю среди всех возможных размещений зрителей составляют невыгодные для Игоря?)

929. Натуральные числа a, b, c, d, e удовлетворяют условию $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$. Докажите, что по крайней мере: а) три из них четны; б) три делятся на 5; в) два делятся на 10.

930*. Числа от 1 до 1985 разбиты на 6 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других (или два числа, из которых одно вдвое больше другого).

931. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB , BC и CA в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Известно, что длины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 равны. Докажите, что треугольник ABC – правильный.

932. В квадратной клетке со стороной 1 м находится анаконда длиной 10 м. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он в любой момент может одним выстрелом прострелить анаконду сразу в 6 местах. Не преувеличивает ли барон? (Анаконду можно считать произвольной ломаной длины 10, расположенной внутри квадрата 1×1 .)

933. 13 рыцарей из k разных кланов ($1 < k < 13$) сидят за круглым столом. Каждый держит золотой или серебряный кубок, причем золотых кубков ровно k . Король Артур приказал рыцарям одновременно передать кубки своим соседям справа, потом сделать то же самое еще раз и так далее. Докажите, что в некоторый момент найдутся два рыцаря из одного клана, в руках у которых будут золотые кубки.

934*. В пространстве расположено $2n$ ($n \geq 2$) точек (так, что никакие 4 не лежат в одной плоскости) и проведено $n^2 + 1$ отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведенные отрезки образуют: а) хотя бы один треугольник; б) не менее n треугольников.

935. (Задача о гайке.) Если внутри правильного $2n$ -угольника со стороной a и центром O поместить произвольным образом правильный $2n$ -угольник со стороной $a/2$, то он накроет точку O . Докажите это утверждение: а) для $n = 2$; б*) для $n = 3$; в*) для любого натурального $n > 1$.

936. Докажите, что за $3n + 1$ взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выделить самый легкий и самый тяжелый из $2n + 2$ камней, если: а) $n = 3$; б) n – любое натуральное число.

937. Существует ли такая фигура F , что ею нельзя накрыть полукруг радиусом 1, а двумя ее экземплярами можно накрыть круг радиусом 1, если F : а) произвольная фигура; б) выпуклая фигура?

938*. Радиус круга с центром O равномерно вращается, поворачиваясь за одну секунду на угол $360^\circ/n$ (где n – натуральное число, большее 3). В начальный момент он занимал положение OM_0 , через секунду – положение OM_1 , еще через 2 секунды – положение OM_2 , еще через 3 секунды после этого – положение OM_3 и так далее, еще через $n - 1$ секунд – положение OM_{n-1} .

а) Докажите, что если n – степень числа 2, то радиусы OM_1, \dots, OM_{n-1} делят круг на n равных секторов.

б) Возможно ли это при других значениях n ?

939. В клетки таблицы 10×10 записывают каким-либо образом цифры 0, 1, ..., 9 так, что каждая цифра встречается 10 раз.

а) Можно ли это сделать так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречалось не более 4 различных цифр?

б*) Докажите, что найдется строка или столбец, в котором встречается не менее 4 различных цифр.

940*. а) Квадрат разбит на прямоугольники. Назовем цепочкой такое множество этих прямоугольников, что их проекции на одну из сторон квадрата целиком покрывают эту сторону без перекрытий (рис.23). Докажите, что любые два прямоугольника входят в некоторую цепочку.

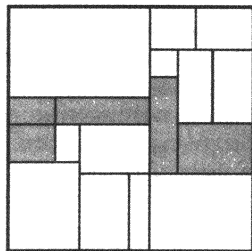


Рис. 23

б) Докажите аналогичное утверждение для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки сторону квадрата нужно заменить на ребро куба).

в) Верно ли, что любые два параллелепипеда в разбиении куба принадлежат одному «слою» – множеству параллелепипедов, проекции которых на некоторую грань заполняют ее целиком, не накладываясь друг на друга?

941. Дан правильный $(4k+2)$ -угольник $A_0A_1 \dots A_{4k+1}$ с центром O . Докажите, что сумма отрезков, отсекаемых углом A_kOA_{k+1} на прямых A_1A_{2k} , A_2A_{2k-1} , ..., A_kA_{k+1} (см. рис.24 для $k=2$), равна радиусу OA_0 описанной окружности $(4k+2)$ -угольника, если: а) $k=2$; б) k – любое натуральное число.

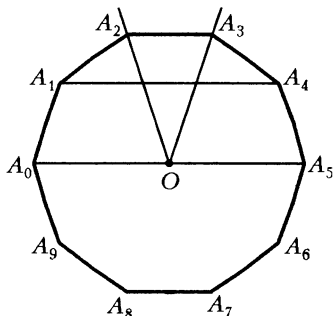


Рис. 24

942. Числа 1, 2, ..., $2n-1$, $2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ – числа первой группы в порядке возрастания, $b_1 > b_2 > \dots > b_n$ – числа второй группы в порядке убывания. Докажите, что

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = n^2.$$

943. Последовательность a_1, a_2, \dots задается такими правилами: $a_{2n} = a_n$ при $n \geq 1$ и $a_{4n+1} = 1$, $a_{4n+3} = 0$ при $n \geq 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

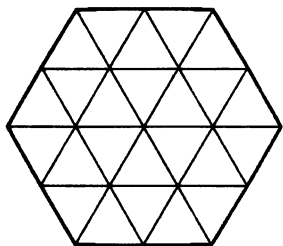


Рис. 25

944*. Правильный шестиугольник разбит на 24 равных треугольника, как на рисунке 25. Во всех 19 узлах образовавшейся фигуры записаны различные числа. Докажите, что среди 24 треугольников разбиения найдется 7 таких, в вершинах которых тройки чисел записаны в порядке возрастания против часовой стрелки.

945*. Дана строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел a_1, a_2, \dots . Докажите, что для всех достаточно больших k справедливо неравенство:

а) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1;$

б) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1985.$

946. Две параболы расположены на плоскости так, что их оси взаимно перпендикулярны и параболы пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

947. На доске в строку написаны числа $1 \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \dots \frac{1}{10} \frac{1}{11} \frac{1}{12}.$

а) Докажите, что как бы мы ни расставляли знаки «+» и «-» между этими числами, полученная сумма не будет равна нулю.

б) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть с доски для того, чтобы после некоторой расстановки «+» и «-» между оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

948. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками (треугольник рассматривается вместе с его внутренней областью). Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками (эти треугольники разрешается передвигать).

949. Даны 1985 гирь с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1984 г, 1985 г. Можно ли их разделить на пять групп так, чтобы и число гирь и их суммарная масса были бы одинаковы во всех пяти группах?

950. Двадцать пять коротышек делят садовые участки в Цветочном Городе. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1 , и все участки вместе представляют собой квадрат 5×5 . Каждый коротышка находится в ссоре не более чем с тремя

другими коротышками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки двух поссорившихся коротышек не были бы соседними. (Соседними называются участки, имеющие общую сторону.)

951. Все стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны 1. Докажите, что радиус описанной окружности одного из треугольников ACE и BDF не меньше 1.

952. Обозначим через $\{x\}$ дробную часть числа x ; $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x .

а) Приведите пример числа a такого, что $\{a\} + \{1/a\} = 1$.

б) Докажите, что такое число a не может быть рациональным.

953. На плоскости даны 6 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Проводятся все 15 прямых, соединяющих попарно эти точки. Каково наибольшее число точек (отличных от данных), в которых пересекаются 3 из этих 15 прямых?

954. а) В треугольник вписан прямоугольник со сторонами a и b так, что все его вершины лежат на сторонах треугольника. Пусть a_1 и b_1 – длины проекций треугольника на прямые, параллельные сторонам a и b прямоугольника. Докажите равенство $\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} = 1$.

б) В произвольный тетраэдр вписан прямоугольный параллелепипед с ребрами a , b и c так, что все его вершины лежат на поверхности тетраэдра. Пусть a_1 , b_1 и c_1 – длины проекций тетраэдра на прямые, параллельные ребрам a , b и c . Докажите равенство $\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} + \frac{c}{c_1} = 1$.

955*. За круглым столом сидят n участников «безумного чаепития». Каждую минуту одна пара соседей меняется местами. Через какое наименьшее время все участники чаепития могут оказаться сидящими в обратном порядке (так, что левые соседи у всех станут правыми и наоборот)? Решите эту задачу: а) для $n = 4, 5$ и 6 ; б) для любого $n \geq 3$.

956. На плоскости проведены 4 окружности одного и того же радиуса так, что три из них проходят через точку A и три – через точку B (рис.26). Докажите, что четыре точки их попарного пересечения, отличные от A и B , – вершины параллелограмма.

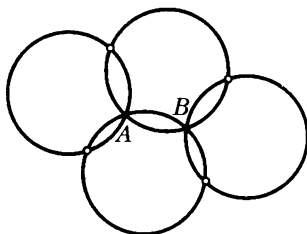


Рис. 26

957. Докажите, что из 1985 различных натуральных чисел, все простые делители которых содержатся среди первых 9 простых чисел 2, 3, ..., 23, можно выбрать четыре числа, произведение которых – четвертая степень целого числа.

958*. Пусть $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ – целые числа. Докажите, что количество нечетных коэффициентов у многочлена

$$(1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} + \dots + (1+x)^{i_n}$$

не меньше, чем у многочлена $(1+x)^4$.

959*. В стране между некоторыми парами городов установлено авиационное сообщение. Докажите, что можно закрыть не более чем $(1/(k-1))$ -ю часть авиалиний таким образом, что среди любых k городов найдутся два, не соединенные между собой авиалинией, если: а) $k = 3$; б) k – любое натуральное число, $k < 1$.

960. Если разность между кубами двух последовательных натуральных чисел – квадрат некоторого натурального числа n , то число n представляется в виде суммы квадратов двух последовательных натуральных чисел.

а) Докажите это утверждение.

б) Вот один пример таких чисел: $8^3 - 7^3 = (2^2 + 3^2)^2$; приведите еще хотя бы один пример.

в) Докажите, что таких примеров существует бесконечно много.

1986 ГОД

961. На стороне AB квадрата $ABCD$ взята точка E , а на стороне CD – точка F , причем $AE : EB = 1 : 2$, $CF = FD$. Будут ли подобны выделенные треугольники (рис.27)?

962. Докажите, что ни для какого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами не могут найтись такие различные целые числа x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$), для которых выполнялось бы равенство $P(x_1) = x_2, P(x_2) = x_3, \dots, P(x_{n-1}) = x_n, P(x_n) = x_1$.

963. Три пары противоположных сторон шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие их середины, пересекаются в одной точке.

964. Докажите, что в последовательности $\{a_n\}$ различных натураль-

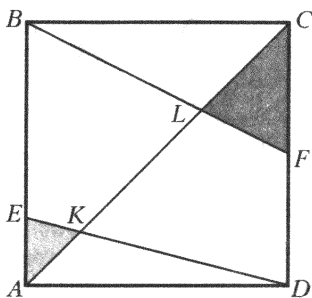


Рис. 27

ных чисел, удовлетворяющих условию $a_n < 100n$, найдется число, в десятичной записи которого: а) встречается цифра 1; б) встречается 1986 единиц подряд.

965. Даны шесть чисел a_1, a_2, \dots, a_6 . Чтобы подсчитать «в лоб» сумму их попарных произведений $a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_5a_6$, нужно затратить 15 умножений и 14 сложений. Покажите, как можно найти сразу сумму этих чисел, сумму их произведений по два, по три, по четыре и по пять, затратив всего 15 сложений и 14 умножений.

966. Докажите, что любой треугольник можно разрезать отрезками на четыре куса, из которых можно составить два подобных ему треугольника.

967. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n (включая 1 и n) и через $\varphi(n)$ – количество чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ выполняется соотношение $\sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n$.

968. Три многоугольника в пространстве расположены так, что их плоскости пересекаются в одной точке О.

а) Докажите, что найдется плоскость, проекции на которую этих трех многоугольников имеют равные площади.

б) Сколько будет таких плоскостей, проходящих через точку О?

969. Докажите для $a, b, c > 0$ неравенство

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

970. На начальной остановке в автобус вошли 32 пассажира, которым нужно ехать до 32 разных остановок, расположенных на расстоянии 1 км друг от друга. Водитель решил провести голосование: какие остановки отменить, а какие сохранить. Он называет остановки в некотором порядке. Пассажир голосует за отмену остановки, если он собирается ехать дальше, против, если он собирается выходить на этой остановке, и воздерживается, если – раньше (не учитывая, что при дальнейшем голосовании могут отменить и его остановку). Если за отмену подано больше голосов, чем против, остановку отменяют, а те, кто хотел на ней выходить, решают ехать до ближайшей к ней из еще не отмененных (если таких две – до первой из них). Какое: а) наименьшее; б*) наибольшее число остановок может сохраниться в зависимости от порядка, в котором их называет водитель?

971. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно

выбрать из них такие команды A, B, C, D , что A выиграла у B , C и D , B выиграла у C и D , C выиграла у D .

972. Последовательность $\{x_n\}$ задается условиями $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Найдите целую часть числа

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_{100} + 1}.$$

973. В треугольнике ABC проведены высота $АН$ и биссектриса BE . Докажите, что если $\angle BEA = 45^\circ$, то и $\angle EHC = 45^\circ$.

974. Двое играют в шахматы с часами. После того как оба сделали по 40 ходов, часы обоих показывали 2 часа 30 минут.

а) Докажите, что в партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого более чем на 1 минуту 50 секунд.

б) Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была не менее 2 минут?

975. На «шахматной доске» размером $n \times n$ стоят 20 различных фигур. Известно, что каждая фигура с любого поля бьет не более 20 полей.

а) Докажите, что при $n = 100$ эти фигуры можно переставить так, чтобы они не били друг друга.

б) Пусть дополнительно известно, что если фигуру сдвинуть, то множество полей, которые она бьет, тоже параллельно сдвинется (на тот же вектор). Докажите, что при $n = 30$ эти 20 фигур можно переставить так, чтобы они не били друг друга.

976. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие между собой угол 45° . Один пересекает сторону BC в точке E и диагональ BD в точке P , другой – сторону CD в точке F и диагональ BD в точке Q . Докажите, что площадь треугольника AEF вдвое больше площади треугольника APQ .

977. Можно ли с помощью операций сложения, вычитания и умножения из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ получить x , если:

а) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + 2$; б) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 - 2$;
в) $f(x) = 2x^2 + x$, $g(x) = 2x$; г) $f(x) = 2x^3 + x$, $g(x) = x^2$?

978. Можно ли в квадрате со стороной 1 расположить два правильных треугольника со сторонами больше $\sqrt{2/3}$, не налегающих друг на друга?

979. Пусть k и n – натуральные числа, $2 \leq k \leq n$. Назовем набор k положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_k , меньших 1, *исключительным*, если для любого разбиения $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ числа n на неотрицательные слагаемые хотя бы одно из чисел $a_i n_i$ – целое ($i = 1, 2, \dots, k$).

а) Для каких k и n существуют исключительные наборы?

б) Каковы эти наборы?

980*. Внутри выпуклого: а) многоугольника; б) многогранника с вершинами A_1, A_2, \dots, A_n взята точка O . Докажите, что среди $n(n-1)/2$ углов A_iOA_k ($i, k = 1, 2, \dots, n$) не менее чем $n-1$ имеют величину от 90° до 180° .

981. Докажите, что число $11\dots 1$ (1986 единиц) имеет по крайней мере: а) 8; б) 28 различных делителей.

982. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты $ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2$. Докажите, что перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 , восстановленные в их серединах, пересекаются в одной точке.

983. В турнире с участием 16 теннисистов каждые двое играют одну партию.

а) Приведите пример распределения результатов партий, при котором любые 10 участников можно расставить по кругу так, чтобы каждый выиграл у своего левого соседа.

б) Докажите, что если условие пункта а) выполнено, то и любых 11 участников можно расставить по кругу таким образом.

984. Через произвольную точку K квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая его противоположные стороны AB и CD в точках P и Q . Докажите, что отличная от K точка пересечения окружностей, проходящих через точки K, B, P и K, D, Q , лежит на диагонали BD (рис.28).

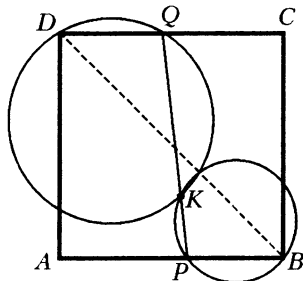


Рис. 28

985*. Углом между двумя прямыми, пересекающимися в точке O , называется угол между их лучами с вершиной O , не превосходящий 90° . Сколькими способами через точку O в пространстве можно провести три прямые l_1, l_2 и l_3 так, чтобы углы

между l_2 и l_3 , l_3 и l_1 , l_1 и l_2 соответственно равнялись данным числам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$? (Две тройки прямых l_1, l_2, l_3 и l'_1, l'_2, l'_3 считаются одинаковыми, если они «конгруэнтны», т.е. если существует поворот или симметрия относительно плоскости, переводящие l_i в l'_i для всех $i = 1, 2, 3$.)

Предостережение: ответ зависит от величин α_1, α_2 и α_3 ; например, для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 30^\circ$ он не такой, как для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 70^\circ$.

986. Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

987. В турнире участвуют $2m$ команд. В первом туре встретились некоторые m пар команд, во втором — другие m пар. Докажите, что после этого можно выбрать m команд, никакие две из которых еще не играли между собой.

988*. Из точки O на плоскости проведено n векторов единичной длины. Докажите, что если для некоторого $k < n/2$ по обе стороны от каждой прямой, проходящей через O , лежит не менее k векторов, то длина суммы всех векторов не превосходит $n - 2k$.

989. Найдите все такие натуральные числа a , для которых число $a - 1$ является суммой: а) двух; б*) трех делителей числа a (не обязательно различных; в число делителей включается 1). в*) Докажите, что для любого n существует лишь конечное число натуральных a таких, что $a - 1$ является суммой n натуральных делителей числа a (не обязательно различных).

990. В пространстве заданы три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, у которых эти прямые: а) проходят по ребрам; б) проходят по ребрам или диагоналям граней; в) содержат 6 вершин параллелепипеда?

991. В треугольнике ABC проведены высота CH и медиана CK . На стороне AB выбраны точки E и F так, что $\angle ACE = \angle BCF$, и на лучи CE и CF опущены перпендикуляры AM и BN (рис.29). Докажите, что точки M , H , K и N лежат на одной окружности.

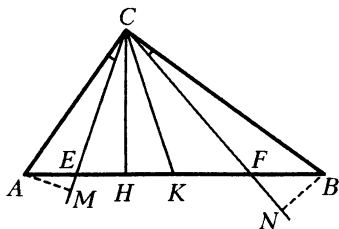


Рис. 29

992. Среди 90 выпускников одной математической гимназии у каждого не менее 10 друзей. Докажите, что любой выпускник может пригласить в гости трех других так, что среди четырех собравшихся у каждого будет не менее двух друзей.

993. а) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат натурального числа.

б*) Докажите, что при $2 < n < 11$ не существует n последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат.

994*. При каком наибольшем значении k неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq k(ab + bc + ca)^2$$

выполняется при всех значениях a , b и c ?

995*. Функция $y = f(x)$ при всех значениях x определена, непрерывна и удовлетворяет условию $f(f(x)) = f(x) + x$.

а) Найдите две такие функции f .

б) Докажите, что других таких функций нет.

996. Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, другого – красные. Докажите, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.

997. Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{mn}$, где m и n – натуральные числа, $1 \leq m < n \leq 1986$, не является целым числом.

998*. Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов четырехугольника $AXBY$, т.е. сумма $\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX$, не зависит от выбора точек X и Y .

999*. а) Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n выполняется неравенство

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < 4 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Докажите, что константу 4 в правой части неравенства:

б) можно заменить на 2;

в) нельзя заменить числом, меньшим 2.

1000. В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH , опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM , делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$ (рис.30).

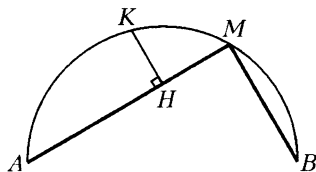


Рис. 30

1001. В куче 1001 камень. Ее произвольно делят на две кучи, подсчитывают число камней в них и записывают произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделявают ту же операцию: делят на две и записывают произведение чисел камней в двух вновь образовавшихся кучах. Затем та же операция повторяется с одной из трех получившихся куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равняется сумма 1000 записанных произведений?

1002. а*) Рассеянный математик, забыв трехзначный код своего подъезда, нажимает кнопки (с цифрами 0, 1, ..., 9) по

одной в секунду. Дверь откроется, если три цифры кода в нужном порядке будут набраны подряд. Математик уверен, что даже в случае «крайнего невезения» (если нужная комбинация встретится последней) он сможет войти в подъезд не позже чем через 16 мин 42 с (1002 с). Прав ли он? Как он должен действовать, чтобы попасть в дом за наименьшее время?

Ответьте на данный вопрос, если:

б) исправны только кнопки с цифрами 1, 2, 3 (другие цифры в код не входят);

в*) исправны все кнопки, но математик помнит, что все три цифры кода различны.

1003. В треугольнике ABC проведены три высоты AH , BK , CL . Докажите равенства

$$AK \cdot BL \cdot CH = AL \cdot BH \cdot CK = HK \cdot KL \cdot LH.$$

1004. Через вершину A треугольника ABC , в котором $AB \neq AC$, проводятся всевозможные прямые. Докажите, что:

а) на каждой из них найдется не более одной точки M , отличной от вершин треугольника, для которой $\angle ABM = \angle ACM$;

б) имеется не более пяти из этих прямых, на которых нет ни одной такой точки M .

1005. Клетки квадратной таблицы размером $n \times n$ ($n \geq 3$) заполняются числами ± 1 по следующим правилам:

1) во все граничные клетки таблицы помещаются числа -1 ;

2) число, помещаемое в очередную незаполненную клетку таблицы, равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от нее и лежащих или в одной строке с ней или в одном столбце с ней. Так делается до тех пор, пока все пустые клетки таблицы не будут заполнены.

а) Какое наибольшее количество $+1$ может получиться в таблице?

б) Какое наименьшее число $+1$ может получиться в таблице?

1006. Через две вершины треугольника проведены две прямые, разбивающие его на три треугольника и четырехугольник.

а) Могут ли площади всех четырех частей быть равными?

б) Какие три из этих частей могут иметь равные площади? Во сколько раз отличается от них площадь четвертой части?

1007. Докажите, что треугольники с длинами сторон a , b , c и a_1 , b_1 , c_1 подобны, если и только если

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)(a + b + c)}.$$

1008. Лестница состоит из $2n + 1$ ступеней. На n нижних ступенях лежит по одному камню. Двое по очереди таскают

камни. Первый может переложить любой камень вверх на первую свободную ступеньку, а второй – переложить камень на одну ступеньку вниз, если она свободна. Цель первого – положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли второй ему помешать?

1009. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC и CD в точках K и L соответственно. Докажите, что центр окружности, проведенной через точки C, K и L , лежит на окружности, проведенной через точки B, C и D .

1010. Последовательность r_1, r_2, r_3, \dots , определяется условиями $r_1 = 2$, $r_{n+1} = r_1 r_2 \dots r_n + 1$, так что $r_2 = 3$, $r_3 = 7$, $r_4 = 43$, ...

а) Докажите, что при любом n выполняется неравенство $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} < 1$.

б*) Пусть n натуральных чисел таковы, что сумма их обратных величин меньше 1. Докажите, что эта сумма не больше $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}$.

Известные нам доказательства опираются на такую лемму, которую мы предлагаем доказать читателям.

в*) Среди всех наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n вещественных чисел, удовлетворяющих условиям $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \leq \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_n$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), выбран тот, для которого значение α_n наименьшее. Тогда $\alpha_k = 1/r_k$ для $k = 1, 2, \dots, n-1$, $\alpha_n = 1/(r_n - 1)$.

1011. Докажите, что для n положительных чисел $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ выполняются такие неравенства:

а) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3)^2$;

б) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2$;

в) $a_1^2 - a_2^2 + \dots - (-1)^n a_n^2 \geq (a_1 - a_2 + \dots - (-1)^n a_n)^2$.

1012. Докажите, что:

а) на плоскости можно расположить несколько непересекающихся кругов так, чтобы каждый касался ровно 5 других;

б) число 5 в пункте а) нельзя заменить на число 6.

1013. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты две точки M и N . Три параллельные прямые, проходящие через точки M, B и N , пересекают основание

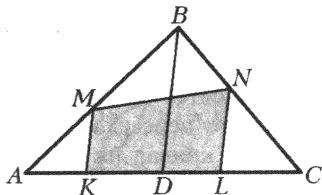


Рис. 31

АС в точках K , D и L . Докажите, что площадь трапеции (или параллелограмма) $KMNL$ не больше площади одного из треугольников ABD и DBC (рис.31).

1014. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – различные попарно взаимно простые натуральные числа. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных b , что числа $b + a_1, b + a_2, \dots, b + a_n$ также попарно взаимно просты.

1015. Можно ли разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$?

1016. Многоугольник описан около окружности с центром O . Пусть P – центр масс многоугольника, K – центр масс его контура. Докажите, что точки P , O и K лежат на одной прямой, причем $PO = 2PK$. (При определении центра P мы рассматриваем многоугольник как однородную пластину, центра K – как контур из однородной проволоки.)

1017*. Каждой вершине правильного пятиугольника приписано некоторое целое число так, что сумма всех пяти чисел положительна. Разрешается проделать следующую операцию: если трем последовательным вершинам приписаны числа x, y, z и $y < 0$, то эти числа заменяются соответственно на $x + y, -y$ и $z + y$. Такие операции выполняются, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Обязательно ли этот процесс закончится через конечное число шагов?

1018. Пусть A и B – соседние вершины правильного n -угольника с центром O . Треугольник XYZ , равный треугольнику OAB , вначале совпадает с ним, а потом движется в плоскости n -угольника так, что точки Y и Z остаются на контуре, а X – внутри n -угольника. Какую фигуру опишет точка X , когда Y и Z совершат полный оборот по границе n -угольника?

1019. На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов (точек пересечения линий сетки). Докажите, что всегда можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные – в красный так, чтобы на каждой линии сетки разность между числом белых и числом красных узлов по модулю не превосходила 1.

1020*. На сфере с радиусом 1 проведена:

а) кривая, длина которой меньше π ;

б) замкнутая кривая, длина которой меньше 2π .

Докажите, что найдется плоскость, проходящая через центр сферы, не пересекающая проведенную кривую. (Можно считать, что кривая на сфере – это «ломаная», состоящая из дуг больших кругов.)

1021. Альпинист хочет подняться на скалу высотой 1000 м. После ночевки в лагере у подножия скалы он может подниматься, навешивая веревку, со скоростью 40 метров в час, а после холодной ночевки на скале – 30 метров в час. По готовой веревке он поднимается со скоростью 400 метров в час. За сколько дней он сможет достичь вершины, если будет работать на скале (включая подъем по веревке) 6 часов в день? (Временем спуска и других операций пренебречь.)

1022. Первые 8 натуральных чисел можно расставить в две строки так, что сумма чисел в верхней строке равна сумме чисел в нижней, а суммы чисел в столбцах также равны между собой:

1	4	6	7
8	5	3	2

Можно ли расставить подобным образом первые: а) десять; б) двенадцать натуральных чисел?

в) При каких натуральных n можно расставить таким образом числа от 1 до $2n$?

1023. Всегда ли из 100 треугольников найдется один такой, что его можно целиком покрыть остальными 99?

1024*. Докажите, что для любых двух треугольников с углами α , β , γ и α_1 , β_1 , γ_1 выполняется неравенство

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} \leq \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

1025*. Две прямые, проведенные через одну и другую точку пересечения продолжений противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разрезают его на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что если в два из них, не имеющих общей стороны, можно вписать окружности, то и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.

1026. а) Пять равных дуг AB , BC , CD , DE , EA расположены так, что каждая делится соседними на три равные части (рис.32). Найдите величину каждой дуги (в градусах).

б) Тот же вопрос для «розетки» из m равных дуг, каждая из которых делится соседними на три равные части.

1027. Докажите, что число $1985!! + 1986!!$ делится на 1987. (Через $n!!$

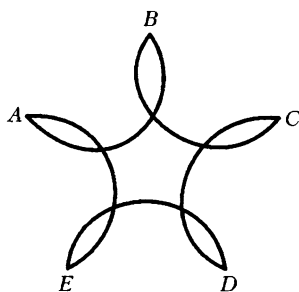


Рис. 32

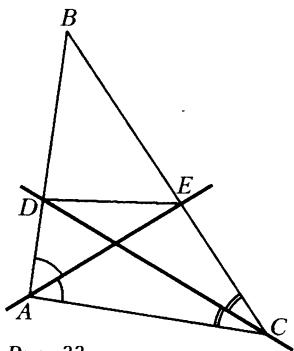


Рис. 33

обозначается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность, т.е. $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$)

1028. а) На плоскости заданы две пересекающиеся прямые, и на них отмечено по одной точке D и E . Постройте треугольник ABC , у которого биссектрисы CD и AE лежат на данных прямых, а их основания – данные точки D и E (рис.33).

б*) Докажите, что если при этом $\angle CDE = 30^\circ$, то один из углов треугольника ABC равен 120° или 60° .

1029. Среди n членов арифметической прогрессии удалось выбрать k членов, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Докажите, что $n \geq 2^{k-1}$.

1030*. Для выпуклого многогранника M обозначим через $S(M)$ сумму площадей его граней, через $P(M)$ – сумму произведений длин всех его ребер на соответствующие им внешние углы многогранника (внешний угол при данном ребре – это угол между перпендикулярами к граням, примыкающим к ребру, и направленными во внешнюю область многогранника; он равен 180° минус величина соответствующего двугранного угла). Докажите, что если многогранник M_1 лежит внутри многогранника M_2 , то:

а) $S(M_1) \leq S(M_2)$;

б) $P(M_1) \leq P(M_2)$.

1031. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой l выбраны точка M , сумма расстояний от которой до точек A и B минимальная, и точка N такая, что $AN = BN$. Докажите, что точки A , B , M и N лежат на одной окружности.

1032. Выписаны n чисел $2, 3, \dots, n+1$, их всевозможные произведения по два, по три и так далее до произведения всех n этих чисел. Докажите, что сумма чисел, обратных всем выписанным, равна $n/2$.

1033. Окружность отсекает от квадрата четыре криволинейных треугольника (граница каждого состоит из дуги окружности и двух отрезков). Выкрасим два из них, примыкающих к противоположным углам квадрата, в голубой цвет, два других – в красный. Докажите, что:

- а) суммы длин красных и голубых дуг равны;
 б) суммы периметров красных и голубых треугольников равны.

1034. Прямоугольная шоколадка разбита продольными и поперечными углублениями на 50 квадратных долек. Двое играют в такую игру. Начинаящий разламывает шоколадку по некоторому углублению на две прямоугольные части. Затем играющие по очереди проделывают это с одной из получившихся частей. Тот, кто первый отломит квадратную дольку (без углублений):

- а) проигрывает;
 б) выигрывает.

Кто из играющих может обеспечить себе выигрыш – начинающий или его партнер?

1035. На отрезке $[0; 1]$ по очереди отмечаются точки x_0, x_1, \dots, x_n . Для каждой точки x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) измеряется расстояние d_k от нее до ближайшей к ней из поставленных ранее точек. Докажите, что

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n \leq 1 + \frac{\log_2 n}{2}.$$

1036. Существует ли такой (невывуклый) пятиугольник, который можно разрезать на два равных пятиугольника?

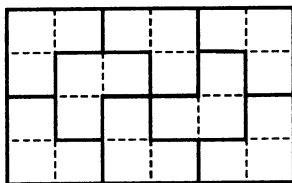
1037. Найдите все решения в натуральных числах x и y уравнения $x^y - y^x = x + y$.

1038. а) Докажите, что если произведение mn делится на 6 (здесь m и n – целые числа, большие 1), то прямоугольник $m \times n$ клеток можно разрезать на уголки из трех клеток (рис.34).

При каких m и n это можно сделать так, чтобы линии раздела не вырезали:

б) ни одного прямоугольника 2×3 клетки;

в) ни одного прямоугольника (меньшего $m \times n$)? Рис. 34



1039. Точки A, B, C, D – вершины тетраэдра. Докажите, что:

а) если $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$, то все эти три скалярные произведения равны 0;

б) если три угла между противоположными ребрами тетраэдра равны, то они прямые.

1040*. Числа $1, 2, \dots, 3n$ произвольным образом разбиты на три группы по n чисел в каждой. Докажите, что можно выбрать

по одному числу из каждой группы так, чтобы одно из них равнялось сумме двух других.

1041. На плоскости заданы: а) четыре; б) три вершины правильного пятиугольника. С помощью двусторонней линейки восстановите его остальные вершины. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой без делений, а также проводить прямую, параллельную данной на расстоянии, равном ширине линейки.)

1042. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учеников этого класса (из одного, двух, трех и так далее человек, кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда будет соревноваться с командой, состоящей из всех остальных учеников класса.

1043. Можно ли разбить множество всех целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого n числа n , $n - 50$, $n + 1987$ принадлежали трем разным подмножествам?

1044. Докажите, что из четырех чисел всегда можно выбрать два числа x и y такие, что $0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq 1$.

1045*. В некотором царстве, некотором государстве, территория которого имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 часам вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому жителю, который в свою очередь может передавать любое указание любому другому жителю, и так далее. Каждый житель до поступления указания находится у себя дома (в известном месте) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении. Докажите, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели прийти к началу бала.

1046. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60° . Докажите, что одна из биссектрис угла, образованного высотами, проведенными из вершин B и C , проходит через центр описанной окружности этого треугольника.

1047. В шахматном турнире, проводимом в один круг, не менее $3/4$ всех сыгранных к некоторому моменту партий закончились вничью. Докажите, что в этот момент некоторые два участника набрали одинаковое число очков.

1048*. Один из двух играющих («начинающий») ставит на некоторую клетку шахматной доски коня. Затем игроки по очереди передвигают коня по обычным правилам (буквой «Г»),

при этом нельзя ставить коня на поле, где он уже побывал. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто может добиться победы (независимо от действий противника) – начинающий или его партнер:

а) на доске 8×8 ;

б) на доске $m \times n$, где $m \geq n \geq 3$?

1049. Будем говорить, что в цилиндр Π_1 вписан боком другой цилиндр Π_2 , если две образующие второго цилиндра лежат на основаниях первого, а четыре точки окружностей основания второго – на боковой поверхности первого (рис.35). Взяв цилиндр Π_1 , у которого отношение диаметра к высоте равно k , впишем в него боком (если это возможно) цилиндр Π_2 , в него впишем Π_3 , в него – Π_4 и так далее. При каких значениях k :

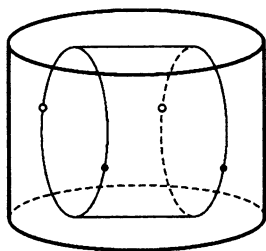


Рис. 35

а) можно вписать Π_2 , но нельзя Π_3 ;

б*) можно вписать Π_{10} , но нельзя Π_{11} ;

в*) можно вписать бесконечную последовательность Π_n ($n = 1, 2, \dots$)?

1050*. На отрезке $[-1;1]$ выбраны k различных точек, для каждой посчитано произведение расстояний до остальных $k - 1$ точек и через S обозначена сумма обратных величин этих k произведений. Докажите, что: а) $S \geq 2$ при $k = 3$; б) $S \geq 4$ при $k = 4$.

1051. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 клеток поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может перепрыгнуть через любую другую фишку, симметрично отразившись от нее, если соответствующее поле свободно. Можно ли несколькими такими ходами собрать все фишки в виде квадрата 3×3 : а) в левом верхнем углу; б) в правом верхнем углу доски?

1052. Докажите, что из n четырехугольников, отсекаемых от выпуклого n -угольника диагоналями, не более $n/2$ могут оказаться описанными около окружности. Приведите пример 8-угольника, у которого таких четырехугольников 4.

1053. Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, где каждое число равно сумме двух предыдущих, при $m \geq 2$ встретится не менее 4 и не более 5 m -значных чисел.

1054. Докажите, что шесть точек попарного касания четырех сфер всегда лежат на одной сфере или на одной плоскости.

1055. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках не менее 100 дуг, не превосходящих 120° .

1056. В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.

1057. Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p . Правилами игры запрещается писать на доске делители уже написанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 10$, и укажите ее.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 1000$.

1058. На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Докажите, что отмеченных узлов бесконечно много.

1059. График функции $y = f(x)$, определенной на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на угол $\pi/2$ вокруг начала координат.

а) Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет ровно одно решение.

б) Приведите пример такой функции.

1060*. На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечетным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломанных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.

1061. В стране, где больше двух городов, некоторые пары городов соединены непересекающимися дорогами. Известно, что для любых трех городов A, B, C по этой сети дорог можно проехать из A в B , не заезжая в C . Докажите, что на всех дорогах можно установить одностороннее движение так, что из каждого города можно будет проехать в любой другой, двигаясь по установленным направлениям.

1062. а) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки E и D . Прямые BD и CE пересекаются в точке M , прямые AM

и BC – в точке P , AM и DE – в точке N . Докажите, что $\frac{PN}{NA} = 2 \frac{PM}{MA}$.

б) На ребрах SA , SB и SC тетраэдра $SABC$ взяты точки D , F и E . Плоскости ABF , BCD и CAE пересекаются в точке M , прямая SM пересекает плоскости ABC и DEF в точках P и N .

Докажите, что $\frac{PN}{NS} = 2 \frac{PM}{MS}$.

1063. Сколько существует различных целых чисел, которые можно представить в виде разности $a - \bar{a}$, где a – n -значное натуральное число ($10^{n-1} \leq a < 10^n$), \bar{a} – число, полученное при записи цифр a в обратном порядке? Например, если $a = 1917$, то $a - \bar{a} = 1917 - 7191 = -5724$. Укажите ответ для: а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) любого натурального n .

1064. Какое максимальное количество точек самопересечения может иметь замкнутая n -звенная плоская ломаная, если: а) n нечетно; б) n четно? (Предполагается, что никакие три вершины не лежат на одной прямой и что никакие три звена не пересекаются в одной точке.)

1065*. Будем рассматривать векторы $(x; y)$ с целыми неотрицательными координатами, причем хотя бы одна координата отлична от 0. Назовем такой вектор *образующим*, если $x - y = 1$.

а) Докажите, что рассматриваемый вектор $(x; y)$ можно представить в виде суммы образующих (или он сам – образующий) тогда и только тогда, когда величина $k(x, y) = x + y - (x - y)^2$ неотрицательна.

б) Докажите, что число $n(x, y)$ различных (с точностью до порядка) представлений вектора $(x; y)$ в виде суммы образующих зависит только от числа $k = k(x, y)$. Найдите $n(13, 18)$.

1066. Шесть точек расположены на плоскости так, что все попарные расстояния между ними не больше 1. Докажите, что из них можно выбрать три точки, попарные расстояния между которыми строго меньше 1.

1067. Докажите, что для неотрицательных чисел x, y, z , удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, выполняется неравенство

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

1068. Дан угол AOB (A и B – точки на сторонах угла). Постройте прямую l , проходящую через вершину O так, чтобы площади треугольников AOC и BOD , где C и D – основания

перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую l , были равны.

1069. В некотором городе разрешены только парные обмены квартирами, причем если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что любой сложный обмен квартирами нескольких семей можно осуществить за два дня. (Предполагается, что и до и после обмена каждая семья живет в отдельной квартире.)

1070. Тетраэдр пересечен тремя плоскостями, каждая из которых параллельна двум его противоположным ребрам и одинаково удалена от них. Докажите, что сумма квадратов площадей этих трех сечений в 4 раза меньше суммы квадратов площадей граней тетраэдра.

1071. На доске нарисовано поле для игры в «цифры»:

$$(((((((((((*) *) *) *) *) *) *) *) *).$$

Двое играющих ходят по очереди. Первый игрок начальным ходом записывает на месте первого (самого левого) пробела () какую-нибудь цифру. Каждый дальнейший ход состоит в том, чтобы записать цифру на месте очередного пробела и заменить стоящую слева звездочку (*) на знак сложения или умножения. При этом ни одна цифра не должна встречаться дважды. В конце игры вычисляется значение полученного выражения. Если это четное число, то выигрывает первый игрок, нечетное – второй. Кто выигрывает при правильной игре?

1072. Разложите на простые множители число

$$989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320.$$

1073. В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ нашлась точка O , из которой все стороны видны под углом 60° . Докажите, что если $OA_1 > OA_3 > OA_5$ и $OA_2 > OA_4 > OA_6$, то $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 < A_2A_3 + A_4A_5 + A_6A_1$.

1074. Дана стопка из $2n + 1$ карточек, с которой разрешается производить следующие две операции:

(А) сверху снимается часть карточек и перекладывается вниз с сохранением порядка;

(Б) верхние n карточек с сохранением порядка выкладываются в n промежутков между нижними $n + 1$ карточками.

Докажите, что с помощью указанных операций из исходного расположения карточек в стопке нельзя получить более $2n(2n + 1)$ расположений карточек.

1075. Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого каждая цифра (кроме крайних) строго меньше полусуммы двух соседних с ней цифр.

1076. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L , а описанную окружность треугольника – в точке N (отличной от A), точки K и M – основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC (рис.36). Докажите, что четырехугольник $AKNM$ равновелик треугольнику ABC .

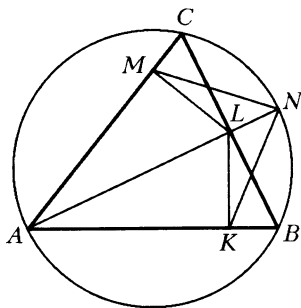


Рис. 36

1077*. Пусть $p_n(k)$ – число перестановок множества из n элементов ($n \geq 1$), имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что:

а) $\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = 0 \cdot p_n(0) + 1 \cdot p_n(1) + \dots + n \cdot p_n(n) = n!$;

б) $\sum_{k=0}^n (k-1)^2 \cdot p_n(k) = n!$.

Примечание. Перестановкой конечного множества S называется взаимно однозначное отображение f множества S на себя. Число всех перестановок множества из n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Элемент a множества S называется неподвижной точкой перестановки f , если $f(a) = a$.

1078. Функция f определена на множестве N_0 всех неотрицательных целых чисел и принимает значения в этом множестве. Докажите, что равенство $f(f(n)) = n + 1987$ не может выполняться для всех n из N_0 .

1079. Пусть n – натуральное число, $n \geq 3$. Можно ли расположить на плоскости n точек так, чтобы расстояние между любыми двумя выражалось иррациональным числом, а площадь треугольника с вершинами в любых трех – рациональным числом (отличным от нуля)?

1080*. Пусть q – натуральное число, $q \geq 2$. Докажите, что если $k^2 + k + q$ – простое число для всех целых k , где $0 \leq k \leq \sqrt{q/3}$, то $k^2 + k + q$ – простое для всех целых k , где $0 \leq k \leq q - 2$.

1988 ГОД

1081. Докажите, что предпоследняя цифра числа 3^n при любом натуральном $n > 2$ четна.

1082. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Докажите, что равенство

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

выполняется тогда и только тогда, когда либо диагонали AC и BD перпендикулярны, либо одна из них делится точкой O пополам.

1083. Наибольшее из неотрицательных чисел a_1, a_2, \dots, a_n равно a .

а) Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

б) Когда в нем достигается равенство?

1084. Две окружности на плоскости пересекаются в точках A и B . Докажите, что можно выбрать такую точку C , что любая окружность с хордой AC будет пересекать данные окружности (второй раз) в точках, одинаково удаленных от C (причем $C \neq B$).

1085*. Несколько попарно скрещивающихся прямых, расположенных в пространстве, проектируются на горизонтальную плоскость. Их проекции изображены так, чтобы в точках пересечения было видно, какая точка расположена выше, а какая ниже. Может ли получиться проекция, изображенная на рисунке 37, а-в?

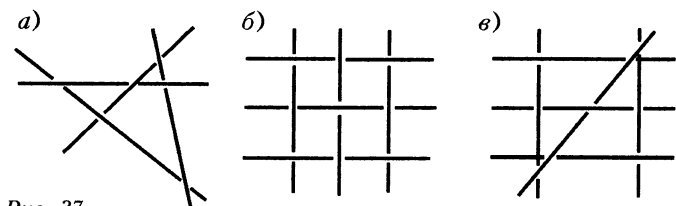


Рис. 37

1086. С числом разрешается производить две операции: «увеличить в 2 раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить: а) число 100; б) число n ?

1087. Рассмотрим треугольник ABC , точку M в плоскости этого треугольника и проекции A_1, B_1, C_1 , точки M на высоты, проведенные из вершин A, B, C соответственно. Докажите, что:

а) существует одна и только одна точка M , для которой отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны;

б) для такой точки M длины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 равны диаметру вписанной в треугольник ABC окружности.

1088. Докажите, что если числа p, q, r рациональны и $pq + qr + pr = 1$, то $(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + r^2)$ — квадрат рационального числа.

1089. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с площадью S диагонали пересекаются в точке O . Пусть K, L, M, N — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA . Докажите, что произведение периметров четырехугольников $ABCD$ и $KLMN$ не меньше $4S$.

1090. Докажите, что:

а) для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2};$$

б) неравенство из п. а) обращается в равенство, если и только если $1/a + 1/c = 1/b$.

1091. Назовем натуральное число *удачным*, если цифры в его десятичной записи можно разбить на две группы так, что суммы цифр в этих группах равны.

а) Найдите наименьшее число a такое, что числа a и $a + 1$ — удачные.

б) Существует ли такое a , что числа $a, a + 1$ и $a + 2$ — удачные?

1092. Вырезанный из бумаги выпуклый многоугольник 10 раз складывают (перегибая по некоторым прямым) и затем разрезают по прямой. Какое наибольшее число кусков может получиться?

1093*. На окружности в n точках расставлены числа 0, 1, 2. Затем одновременно во всех точках производится следующее преобразование: каждое число 2 заменяется на 0, а потом к следующему за ним по часовой стрелке числу прибавляется 1. Пусть вначале количество двоек равнялось $k \geq 1$.

а) Через какое количество преобразований заведомо не останется ни одной двойки?

б) Пусть, кроме того, в $n - k$ остальных точках вначале стояли единицы. Докажите, что в конце концов останется k единиц и $n - k$ нулей. (Один из примеров приведен на рисунке 38.)

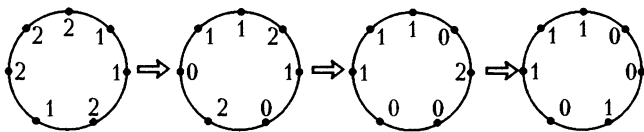


Рис. 38

1094. Пусть a, b, c — неотрицательные числа.

а) Докажите, что из неравенства

$$a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

следует неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca).$$

б) Верно ли обратное: из второго неравенства следует первое неравенство?

1095. На плоскости заданы окружность с центром в точке O и две точки A и B (отличные от O) такие, что прямая AB проходит через точку O . Постройте хорду MN этой окружности, которая видна из точки A под заданным углом α и: а) параллельна прямой AB ; б) проходит через точку B . (Если B лежит вне окружности, то через B должно проходить продолжение хорды MN .)

1096. Диаметр d окружности разбит на k равных частей и через каждую точку деления проведена хорда, перпендикулярная диаметру. Докажите, что сумма длин всех проведенных хорд не меньше $0,5 kd$ и не больше $0,8 kd$.

1097. Координаты вершин равнобедренного треугольника — целые числа. Докажите, что квадрат основания — четное число.

1098. На окружности расставлены n точек, занумерованных подряд числами $1, 2, \dots, n$. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит хорду, соединяющую две точки с номерами одной четности. Каждая хорда не должна иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто делает последний ход. При каждом $n = 4, 5, 6, \dots$ выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию: начинающий или его партнер.

1099*. В отряде, ведущем подготовку к полету на Марс, 6783 космонавта, причем известно, что среди любых четырех из них можно выбрать троих, составляющих слаженный экипаж для посадочного модуля. Докажите, что можно выбрать 5 космонавтов, любые трое из которых составляют слаженный экипаж.

1100. На берегу прямолинейной реки лежат бревна (не пересекающие друг друга отрезки; их число конечно; рис.39).

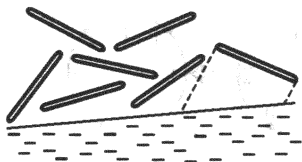


Рис. 39

Каждое бревно составляет с линией берега угол меньше 45° . Докажите, что для любого расположения бревен всегда найдется бревно, которое можно закатить в реку, не задевая остальных. (Поворачивать бревно при качении не разрешается.)

1101. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC нашлись такие точки D и E соответственно, что $AD = BC = EC$ и треугольник

ADE равнобедренный. Каким может быть угол при вершине A ?

1102. Докажите, что существуют n различных натуральных чисел, сумма кубов которых равно кубу натурального числа, если:

а) $n = 3$; б) $n = 4$;

в) n — любое натуральное число, большее 2.

1103. а) На бесконечной плоскости, разбитой на квадратные клетки, некоторое — быть может бесконечное — количество прямоугольников размером 1×2 закрашено в черный цвет так, что никакие два черных прямоугольника не имеют общих точек (даже вершин). Докажите, что оставшуюся часть плоскости можно замостить этими прямоугольниками.

б*) Пусть на клетчатой плоскости закрашены несколько прямоугольников размером $m \times n$, не имеющих общих точек. Докажите, что если mn четно, то оставшуюся часть плоскости можно замостить прямоугольниками размером 1×2 , а если mn нечетно, то это возможно не всегда.

1104. В тетраэдре $ABCD$ грани ABC и BCD перпендикулярны, $\angle BAC = 90^\circ$. Докажите, что из отрезков, длины которых равны произведениям длин противоположных ребер тетраэдра, можно составить прямоугольный треугольник.

1105. После нескольких прямолинейных разрезов поверхность выпуклого многогранника развернули на плоскость. Получился многоугольник, для которого известно, какие точки его границы «склеиваются», т.е. отвечают одной и той же точке на поверхности многогранника. Каким был исходный многогранник, если при разрезании получился:

а) прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$;

б) равнобедренный треугольник с углом 120° ,
причем в обоих случаях склеиваются точки каждой стороны, симметричные относительно ее середины?

1106. Каждая из трех прямых, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

1107. Докажите, что если a , b и c — длины сторон треугольника, то

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 3.$$

1108. В выпуклом n -угольнике ($n > 4$) никакие три диагонали не проходят через одну точку внутри многоугольника. Какое наибольшее число диагоналей в нем можно провести так, чтобы

все части, на которые они разобьют n -угольник, оказались треугольниками?

1109. В одном старом задачнике по геометрии была помещена такая задача: вычислить длину стороны правильного треугольника, вписанного в параболу $y = x^2$. В указании к задаче говорилось, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы. Верно ли такое указание? Может ли длина стороны правильного треугольника, вписанного в эту параболу, быть равной: а) 3; б) 1988? .

1110*. Для каждого натурального $n > 1$ выпишем наибольшие общие делители всевозможных пар различных чисел от 1 до n . Докажите, что: а) среднее арифметическое всех $n(n - 1)/2$ выписанных чисел неограниченно растет с ростом n , но не превосходит $\ln n + 1$; б) их среднее геометрическое не превосходит 10 при любом n .

1111. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C , пересекают касательную, проведенную в точке B , в точках M и N соответственно. В треугольнике ABC проведена высота BP (точка P лежит на стороне AC). Докажите, что прямая BP является биссектрисой угла MNP .

1112. На доске написаны два числа: 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b , то можно написать число $ab + a + b$. Можно ли этим способом получить:

а) число 13121; б) число 12131?

Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде:

в) $x + y + xy$; г) $x + y + 2xy$ с натуральными x и y .

1113*. В стране 21 город. Авиационное сообщение между городами осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых обслуживает 10 беспосадочных авиалиний, связывающих попарно некоторые пять городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?

1114. Докажите, что для любого тетраэдра имеет место неравенство $r < \frac{ab}{2(a+b)}$, где a, b — длины двух скрещивающихся ребер, а r — радиус вписанного шара.

1115*. а) В первой строке написаны 19 натуральных чисел, не превосходящих 88, а во второй строке — 88 натуральных

чисел, не превосходящих 19. Назовем отрезком одно или несколько подряд написанных чисел одной строки. Докажите, что из данных строк можно выбрать по отрезку так, что суммы чисел в них равны.

б) Пусть n, m, k — натуральные числа, $m \geq n$. Докажите, что если $1 + 2 + \dots + n = mk$, то числа $1, 2, \dots, n$ можно разбить на k групп так, чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m .

1116. Какое наибольшее число узлов клетчатой бумаги может содержать прямоугольник площадью: а) 36; б) S , стороны которого идут по линиям сетки? (Считаются узлы, лежащие внутри и на границе прямоугольника. Площадь клетки принята за 1.)

1117. Дан произвольный треугольник. Докажите, что:

а) можно построить три окружности с центрами в его вершинах, попарно касающиеся друг друга в точках K, L, M (рис.40);

б) если через середину каждой дуги KL, LM, MK , лежащей внутри треугольника, провести касательную к ней, то образуется четыре треугольника, площадь одного из которых (центрального) равна сумме площадей трех других.

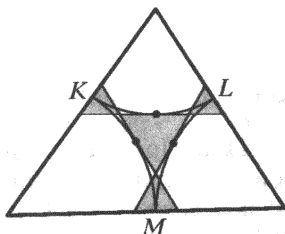


Рис. 40

1118. а) Докажите, что уравнение

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

б) Сколько имеется таких решений, у которых $z = 1988$?

1119. Назовем k -звездой фигуру на плоскости, состоящую из k лучей с общим началом, разбивающих плоскость на k равных углов (по $360^\circ/k$). При каких $k > 2$ верно следующее утверждение: для любых k точек плоскости общего положения (никакие три из которых не лежат на одной прямой) существует k -звезда, в каждом из k углов которой содержится ровно одна из этих k точек?

1120. а) Последовательность a_0, a_1, a_2, \dots задана соотношениями $a_0 = 0, a_n = P(a_{n-1}), n = 1, 2, \dots$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(x) > 0$ при $x \geq 0$. Докажите, что для любых натуральных m и k

$$\text{НОД}(a_m, a_k) = a_{\text{НОД}(m, k)}.$$

б) Докажите аналогичное утверждение для последовательно-

сти Фибоначчи $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, ..., задаваемой условием $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

1121. Дан треугольник ABC . Две прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K . Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .

1122. Решите систему

$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1, \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2, \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3, \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4, \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5. \end{cases}$$

1123. Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла («вертикальные» и «горизонтальные» ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы и каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?

1124. Боковые стороны, диагонали и продолжения оснований трапеции пересекают прямую l в шести точках, т.е. высекают на прямой l пять отрезков.

а) Докажите, что если крайние (1-й и 5-й) отрезки равны, то соседние с ними (2-й и 4-й) также равны.

б) При каком отношении оснований трапеции можно провести прямую l так, чтобы все пять отрезков были равны?

1125. Рассматривается последовательность слов, состоящая из букв A и B . Первое слово в последовательности — A ; k -е слово получается из $(k-1)$ -го с помощью следующей операции: каждое A заменяется на AAB , каждое B — на A .

а) Докажите, что каждое слово является началом следующего; тем самым определяется бесконечная последовательность букв: $AABAABAABAABAAB\dots$

б*) На каком месте в этой последовательности встретится 1988-я буква A ?

в*) Докажите, что эта последовательность непериодическая.

1126. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD на сторонах AB и CD выбраны точки K и M . Докажите, что если $\angle BAM = \angle CDK$, то $\angle BMA = \angle CKD$.

1127. Микрокалькулятор «Чебурашка» умеет складывать, вычитать и находить по данному числу x обратное число $1/x$. Можно ли с помощью этого микрокалькулятора получить единицу, если исходное число: а) $\sqrt{19 + 88}$; б) $\sqrt[19]{88}$; в) $\sqrt{19 + \sqrt{88}}$? (Вводить в микрокалькулятор числа, отличные от исходного или от полученных в результате вычислений на нем, запрещается.)

1128. На шахматной доске расставлено несколько фишек. За один ход одна из фишек передвигается на соседнее (по горизонтали или вертикали) свободное поле. После нескольких ходов оказалось, что каждая фишка побывала на всех полях ровно по одному разу и вернулась на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни одна фишка не стояла на своем исходном поле.

1129*. В лесу барона Мюнхгаузена растут елки и березы. Барон утверждает, что на расстоянии ровно 1 км от каждой елки растет в точности 10 берез, причем елок в его лесу больше, чем берез. Может ли это быть?

1130. На плоскости дан выпуклый n -угольник, у которого длина k -й стороны равна a_k , а длина проекции многоугольника на прямую, содержащую эту сторону, равна d_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Докажите неравенство

$$2 \leq \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \dots + \frac{a_n}{d_n} \leq 4.$$

1131. Пусть n — натуральное число и $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ — подмножества некоторого множества B . Предположим, что:

а) каждое подмножество A_i ($i = 1, 2, \dots, 2n + 1$) содержит ровно $2n$ элементов;

б) каждое множество $A_i \cap A_j$ ($1 \leq i < j \leq 2n + 1$) содержит ровно один элемент;

в) любой элемент из множества B принадлежит не менее чем двум из множеств A_i ($i = 1, 2, \dots, 2n + 1$).

Для каких значений n можно поставить в соответствие каждому элементу множества B одно из чисел 0 или 1 так, чтобы каждое из множеств $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ содержало ровно n элементов, соответствующих числу 0?

1132. Функция f определена на множестве целых положительных чисел и удовлетворяет следующим условиям:

$$f(1) = 1, f(3) = 3, f(2n) = f(n),$$

$$f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n),$$

$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n).$$

Найдите число всех таких значений n , для которых $f(n) = n$ и $1 \leq n \leq 1988$.

1133. Докажите, что множество решений неравенства

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

является объединением непересекающихся промежутков, сумма длин которых равна 1988.

1134. Пусть AD – высота в прямоугольном треугольнике ABC , $\angle A = 90^\circ$. Прямая, проходящая через центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD , пересекает стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите неравенство $S_{ABC} \geq 2S_{AKL}$.

1135. Пусть a и b – целые положительные числа такие, что $a^2 + b^2$ делится на $ab + 1$ без остатка. Докажите, что $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ – квадрат целого числа.

1136*. Докажите для неотрицательных чисел A, M, S неравенство

$$3 + (A + M + S) + \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{M} + \frac{1}{S} \right) + \left(\frac{A}{M} + \frac{M}{S} + \frac{S}{A} \right) \geq \frac{3(A+1)(M+1)(S+1)}{AMS+1}.$$

1137. В выпуклом n -угольнике все углы равны и из некоторой точки, расположенной внутри n -угольника, все его стороны видны под равными углами. Докажите, что этот n -угольник правильный.

1138*. Докажите, что для любого натурального n между числами n^2 и $n^2 + n + 3\sqrt{n}$ найдутся три натуральных числа, произведение двух из которых делится на три.

1139. а) Поверхность выпуклого многогранника можно разрезать на несколько квадратов. Докажите, что у этого многогранника не больше 8 вершин.

б) Какое наибольшее число вершин может иметь выпуклый многогранник, поверхность которого можно разрезать на правильные треугольники?

1140. Нарисуем на плоскости одну или несколько пересекающихся кривых (кривые могут иметь точки самопересечения; рис.41). В каждой точке пересечения можно двумя способами выполнить «перестройку» (рис.42). Если проделать перестройку во всех точках

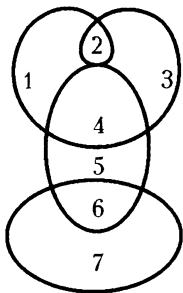


Рис. 41

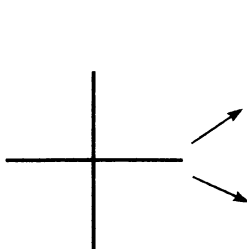


Рис. 42

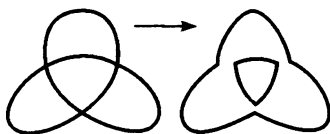
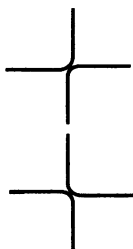


Рис. 43

пересечения, то получится несколько непересекающихся кривых (рис.43).

а) Докажите, что число непересекающихся кривых, которые могут получиться, не больше числа областей, на которые делили плоскость исходные кривые (на рисунке 41 таких областей 7).

б) Всегда ли можно сделать перестройки так, чтобы в результате получалась одна кривая?

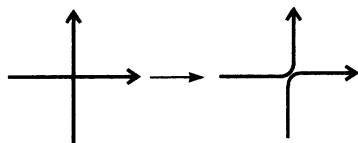


Рис. 44

в) Выберем на каждой кривой направление обхода и будем производить перестройки в соответствии с этими направлениями так, чтобы стрелки «отталкивались» друг от друга (рис.44). Может ли в результате получиться одна кривая?

1989 ГОД

1141. Трапеция описана около окружности. Докажите, что хотя бы одна из ее диагоналей образует с основанием угол не более 45° .

1142. Таблица $m \times n$ заполнена mn числами так, что в каждой строке и в каждом столбце эти числа составляют арифметическую прогрессию. Сумма четырех чисел, стоящих в углах таблицы, равна s . Чему равна сумма всех чисел в таблице?

1143. Масса каждой из 101 гирек, расположенных по окружности, — натуральное число, а их общая масса равна 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, с общей массой 200 г.

1144. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — неотрицательные числа. Какое число больше:

$$\sqrt[1988]{a_1^{1988} + a_2^{1988} + \dots + a_n^{1988}} \quad \text{или} \quad \sqrt[1989]{a_1^{1989} + a_2^{1989} + \dots + a_n^{1989}} ?$$

1145*. Из точки P проведены две касательные PB и PC к окружности, причем $\angle BPC > 90^\circ$. На меньшей дуге BC взята точка A . Докажите, что площадь треугольника, отсекаемого от угла BPC касательной к окружности в точке A , не превосходит площади треугольника ABC .

1146. Точка K – середина стороны AB равностороннего треугольника ABC . На сторонах AC и BC взяты точки M и N так, что $\angle MKN = 60^\circ$. Докажите, что периметр треугольника MCN равен половине периметра треугольника ABC .

1147. Заданы несколько точек, соединенных отрезками двух цветов: некоторые пары точек – голубыми отрезками, некоторые другие – красными. Известно, что в любом замкнутом пути, состоящем из нескольких отрезков, число красных отрезков четно. Докажите, что все точки можно разбить на два множества так, что каждый красный отрезок соединяет точки из разных множеств, а каждый голубой – точки из одного и того же множества.

1148. Докажите, что для любого $a > 1$ (причем $a \neq \sqrt[p]{q}$, где p и q – целые числа) и натурального n выполняется равенство

$$[\log_a 2] + [\log_a 3] + \dots + [\log_a n] + [a] + [a^2] + \dots + [a^k] = nk,$$

где $k = [\log_a n]$ ($[x]$ – целая часть числа x).

1149. На плоскости заданы два луча p и q с вершинами в точках P и Q соответственно. Две окружности – одна с центром на луче p , проходящая через точку P , другая с центром на луче q , проходящая через Q , – касаются друг друга в точке M внешним образом. Найдите множество точек M .

1150. Докажите, что при любых положительных a_1, a_2, \dots, a_n выполняется неравенство

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}.$$

1151. а) Докажите равенство

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2.$$

б) Найдите сумму

$$\frac{1 \cdot 3!}{3} + \frac{2 \cdot 4!}{3^2} + \dots + \frac{n \cdot (n+2)!}{3^n}.$$

1152. Пусть h и l – высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, R и r – радиусы его описанной и вписанной окружностей. Докажите неравенство $h/l \geq \sqrt{2r/R}$.

1153. Какое наибольшее число поворотов может содержать замкнутый маршрут ладьи, обходящий по одному разу все клетки шахматной доски 8×8 клеток?

1154*. Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность и описан около другой окружности, то прямая, проведенная через центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.

1155. Точка движется в треугольнике, отражаясь от его сторон по закону «угол падения равен углу отражения». *Периодической* называется такая траектория этой точки, которая является замкнутой ломаной и не проходит через вершины треугольника. (Примеры периодических траекторий с 3-мя и 6-ю звеньями в треугольнике приведены на рисунке 45.)

а) Докажите, что ни в каком треугольнике с различными сторонами нет четырехзвенной периодической траектории.

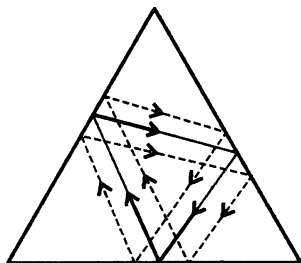


Рис. 45

Существует ли остроугольный треугольник, имеющий периодическую траекторию: б) из 5 звеньев; в) из 7 звеньев?

1156. Восемь хоккейных команд соревнуются между собой за выход в финальную четверку. Каждая две команды встречаются один раз, за выигрыш дается два очка, за ничью – одно очко, за проигрыш – 0 очков. Какое наименьшее число очков гарантирует выход в финальную четверку?

1157. Три треугольника – белый, красный и зеленый – имеют общую внутреннюю точку M . Докажите, что можно выбрать по одной вершине каждого треугольника так, чтобы точка M находилась внутри или на границе треугольника с вершинами в выбранных точках трех разных цветов.

1158. Найдите наименьшее значение выражения $(x + y)(x + z)$, если x, y, z – положительные числа и $xyz(x + y + z) = 1$.

1159. С помощью двусторонней линейки постройте угол величиной 30° . Разрешены следующие операции: (1) проведение прямой через две точки, (2) проведение прямой, параллельной данной, на расстоянии, равном ширине линейки.

1160. У одного конца A прямолинейной дороги AB собрались 10 кенгуру и начали играть в чехарду. Они прыгают по очереди: первый каждый раз прыгает, куда хочет, второй прыгает через первого так, чтобы первый оказался точно посередине между

началом и концом прыжка, третий точно так же прыгает через второго и так далее, десятый прыгает через девятого, затем начинается новая серия прыжков по тем же правилам.

а) Могут ли через 10 серий прыжков все кенгуру собраться в точке B ?

б) Могут ли они собраться там раньше?

1161. В бильярдном треугольнике вплотную помещается 10 шаров. Докажите, что если в нем поместить 9 шаров, то обязательно останется место для десятого (т.е. центры 9 шаров расположатся по треугольной сетке).

1162. Найдите все решения в целых числах (x, y) уравнения $x^3 - 13xy + y^3 = 13$.

1163. Черепаха вышла из точка A и пришла в точку B , двигаясь по произвольной траектории с произвольной скоростью. Вслед за ней из точки A вышла вторая черепаха, которая в каждый момент двигалась в направлении первой (с произвольной скоростью) и в конце концов также пришла в точку B . Докажите, что путь, пройденный второй черепахой (к моменту прихода обеих в B), не превосходит пути первой.

1164. Натуральное число n называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, меньших n (например: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$). Докажите, что нечетное совершенное число (если такое существует) не может одновременно делиться на 3, на 5 и на 7.

1165. Докажите, что квадрат со стороной n (n – натуральное число), расположенный произвольным образом на листе клетчатой бумаги с клетками 1×1 , покрывает не более $(n+1)^2$ узлов сетки.

1166. Докажите неравенство

$$a^2pq + b^2qr + c^2rp \leq 0,$$

где a, b, c – длины сторон треугольника, $p + q + r = 0$.

1167. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, в которых для любого числа i , стоящего не на первом месте, хотя бы одно из чисел $i - 1$ и $i + 1$ находится левее i ?

1168*. В стране 1989 городов и 4000 дорог (каждая дорога соединяет два города). Докажите, что можно выбрать кольцевой маршрут, проходящий не более чем через 20 городов.

1169. Пусть M – точка, лежащая внутри прямоугольника $ABCD$, S – его площадь. Докажите неравенство

$$S \leq AM \cdot CM + BM \cdot DM.$$

1170. Рассмотрите разбиения данного выпуклого n -угольника

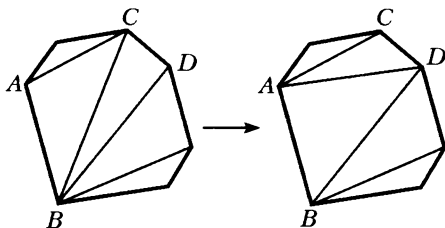


Рис. 46

на треугольники непересекающимися диагоналями. Назовем *перестройкой* следующее преобразование: вместо некоторой диагонали BC , служащей общей стороной двух треугольников ABC и BCD разбиения, проводится диагональ AD (рис. 46). Обозначим через $P(n)$ наименьшее число перестроек, за которое можно любое разбиение перевести в любое другое. Докажите такие оценки:

- а) $P(n) \geq n - 3$;
- б) $P(n) \leq 2n - 7$;
- в*) $P(n) \leq 2n - 10$ при $n \geq 13$.

1171. Обозначим сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ через h_n . Докажите (для каждого натурального n) неравенство

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{2h_2^2} + \frac{1}{3h_3^2} + \dots + \frac{1}{nh_n^2} < 2.$$

1172. Какой наибольший угол могут составлять между собой отрезки OA и OB , выходящие из начала O прямоугольной системы координат в пространстве, если точка A имеет координаты (x, y, z) , а точка B — координаты (y, z, x) ?

1173*. Через одну точку внутри треугольника с площадью S проведены три прямые так, что каждую сторону треугольника пересекают две из них (рис. 47). Докажите, что для площадей S_1, S_2, S_3 трех образовавшихся при этом треугольников выполняется неравенство

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{9}{S}.$$

1174*. Последовательность целых чисел a_1, a_2, a_3, \dots задается условиями $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 20, a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

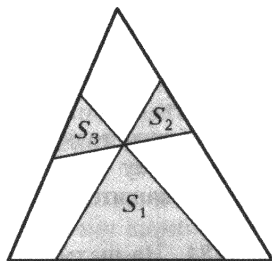


Рис. 47

Докажите, что для любого номера n число $1 + 4a_n a_{n+1}$ — квадрат целого числа.

1175*. При каких натуральных n верно следующее утверждение: как бы ни были разложены на плоскости несколько непересекающихся правильных n -угольников, один из них можно выдвинуть по некоторому направлению, не задевая остальных? (Поворачивать n -угольник нельзя, т.е. все лучи, выходящие из точек выбранного n -угольника в нужном направлении, не должны задевать остальные n -угольники.)

1176. Два квадрата $AKBM$ и $CNDL$ расположены на плоскости так, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, причем точки K и L лежат внутри него. Докажите, что площадь этого четырехугольника равна $(MN^2 - KL^2)/4$.

1177. Докажите, что для положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , не превосходящих 1, выполняется неравенство

$$(1 + x_1)^{1/x_2} (1 + x_2)^{1/x_3} (1 + x_3)^{1/x_4} \dots (1 + x_n)^{1/x_1} \geq 2^n.$$

1178. а) Докажите, что для нетупоугольного треугольника ABC со сторонами a, b, c , радиусом вписанной окружности r и описанной R выполняется неравенство

$$2(R + r) \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

б) При каком условии это неравенство обращается в равенство?

1179. Найдите a_{1000} , если $a_1 = 0$ и при $n = 1, 2, 3, \dots$:

а) $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}(a_n + 1);$

б) $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(a_n + 1);$

в) $a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}(a_n + 1).$

1180. На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки A и B , на другой — точки C и D . Отрезок AC проходит через общую точку сфер, отрезок BD проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую AC равны.

1181. На шахматной доске расставлены 8 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду клеток

стоит по одной фигуре. Докажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное число фигур.

1182. В некоторой роще было $n \geq 3$ скворечников, причем все расстояния между скворечниками различны. В каждом из них жило по скворцу. В какой-то момент некоторые из них покинули свои скворечники и перелетели в другие, так что снова в каждом скворечнике оказалось по скворцу. При этом если расстояние между какой-то парой скворцов было меньше расстояния между другой парой (один скворец может засчитываться в разных парах), то после перелета расстояние между первой парой скворцов оказалось больше расстояния между второй парой. При каких n это возможно?

1183. Каждый из семи мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые два из них встречались около киоска. Докажите, что в некоторый момент там встретились одновременно трое мальчиков.

1184. На всех шести ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах, выходящих из одной вершины, проведем плоскость. Докажите, что если три из них касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость тоже касается вписанного шара.

1185. Найдите положительные числа x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющие системе n уравнений

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_k + x_{k+1} + \dots + x_n) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в*) $n = 10$.

г*) Докажите, что эта система при любом n имеет единственное решение (в положительных числах).

1186. Будем говорить, что два четырехугольника – бумажный и картонный – подходят друг к другу, если картонный можно наложить на бумажный так, что все его вершины попадут на стороны бумажного (по одной на каждую) и при этом, если перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный четырехугольник, то они закроют весь его в один слой.

а) Докажите, что если четырехугольники подходят друг к другу, то у бумажного либо две противоположные стороны параллельны, либо диагонали перпендикулярны.

б) Докажите, что если бумажный четырехугольник – параллелограмм, то можно сделать подходящий к нему картонный.

1187. Докажите, что если m четно, то все целые числа от 1 до $m - 1$ можно выписать в таком порядке, что никакая

сумма нескольких подряд идущих чисел не будет делиться на m .

1188. а) Дано 101 прямоугольников с целыми сторонами, не превосходящими 100. Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника A, B, C , которые можно поместить друг в друга: $A \subseteq B \subseteq C$.

б) Докажите, что среди 1989 прямоугольников с целыми сторонами, не превосходящими 100, найдутся 40 прямоугольников таких, что первый можно поместить во второй, второй – в третий, ..., 39-й – в 40-й.

1189*. На плоскости даны n прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Докажите, что в каждой из частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно поставить целое число, отличное от 0 и не превосходящее по модулю n , так, что по любую сторону от любой из этих прямых сумма чисел равна 0.

1190*. а) Докажите, что если в таблице $2n \times 2n$ клеток стоят $3n$ звездочек, то можно вычеркнуть n строк и n столбцов так, что все звездочки будут вычеркнуты.

б) Докажите, что в таблице $2n \times 2n$ клеток можно расставить $3n + 1$ звездочку так, что после вычеркивания любых n строк и n столбцов останется по крайней мере одна звездочка.

1191. Пусть A_1, A_2, A_3, \dots – некоторая последовательность точек на плоскости. Начав с некоторой точки T_0 , построим последовательность T_1, T_2, T_3, \dots , где T_n – точка, симметричная T_{n-1} относительно A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять последовательность A_n , чтобы последовательность T_n получалась периодической при любом выборе точки T_0 (т.е. $T_{n+p} = T_n$ для некоторого p при всех n)?

1192. Известно, что все ребра многогранника M равны между собой и касаются некоторого шара.

а) Пусть одна из граней M имеет нечетное число сторон. Докажите, что существует описанный вокруг M шар.

б) Обязательно ли при условиях пункта а) существует вписанный в M шар?

в) Пусть все грани M имеют одинаковое число сторон. Докажите, что существует вписанный в M шар.

г) Обязательно ли при условиях пункта в) существует описанный шар?

1193*. Докажите, для любых чисел a, b, c, x, y, z , неравен-

$$\begin{aligned}
 ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} &\geq \\
 &\geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).
 \end{aligned}$$

1194. а) Из точки M внутри прямоугольника $ABCD$ с площадью S проведены биссектрисы ME , MF , MG , MH треугольников AMB , BMC , CMD , DMA . Докажите, что для площади S_0 четырехугольника $EFGH$ выполняются неравенства

$$\frac{3}{8}S < S_0 \leq \frac{1}{2}S.$$

б) Для каких точек M выполняется равенство $S_0 = S/2$?

1195. Последовательность x_1, x_2, \dots такова, что для любых натуральных m и n

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < 1/(m + n).$$

Докажите, что эта последовательность – арифметическая прогрессия.

1196. Даны несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа $a + b/2$ и $b - a/2$. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя получить исходный набор чисел.

1197. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB , точка N – на стороне BC , O – точка пересечения отрезков CM и AN . Известно, что $AM + AN = CM + CN$. Докажите, что

$$AO + AB = CO + CB.$$

1198*. Назовем *словом* строчку из 10 цифр 0 и 1. Два слова будем считать *синонимами*, если одно можно получить из другого несколькими операциями следующего вида: из слова вычеркивается несколько подряд идущих цифр, сумма которых четна, и на их место вписываются те же цифры, но в обратном порядке. Каково максимальное число слов, среди которых нет синонимов?

1199*. Докажите, что если уравнение $ax^2 + (c - b)x + (e - d) = 0$ имеет корень, больший 1, то уравнение

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

имеет хотя бы один корень.

1200*. Для каких k можно расположить на окружности: а) 10; б) 100; в) n дуг так, чтобы каждая из них пересекалась ровно с k другими?

1990 ГОД

1201. В парламент Анчурии нужно избрать по одному депутату от каждого из 999 избирательных округов с одинаковым числом избирателей. В Анчурии создано три партии A , B , C , выдвигающие своих кандидатов. Партию A поддерживает всего 15% избирателей, B – 30%, C – 55%. Если на первом туре выборов в округе ни один из кандидатов не набирает 50% голосов, то во второй тур проходят двое, набравшие наибольшее число голосов. Во втором туре партии A и B договорились поддерживать друг друга, а сторонники C голосуют за кандидата партии A . Какое наибольшее и какое наименьшее число кандидатов от каждой из партий может быть избрано в парламент?

1202. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK , BL , DM , DN из вершин B и D . Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.

1203. Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 км на: а) 31 квадрат; б) 30 квадратов так, чтобы один из них имел сторону не более 1 м?

1204*. На плоскости заданы точки A , B , C – центры трех кругов. Каждый круг равномерно раздувается (радиус увеличивается с одинаковой для всех кругов скоростью). Как только два круга касаются друг друга, они «лопаются» – их радиусы уменьшаются до 0 – и начинают расти снова. Верно ли, что если расстояния AB , BC , CA – целые числа, то этот процесс будет периодическим?

Изучите, как может развиваться этот процесс, если треугольник ABC : а) равносторонний; б) равнобедренный; в) прямоугольный со сторонами 3, 4, 5. Начальное состояние может быть произвольным (не только «нулевым»).

1205. Мальчик и девочка играют в такую игру: мальчик рисует на плоскости не налегающие друг на друга многоугольники, а девочка их раскрашивает. Если два многоугольника имеют общий отрезок стороны, то они должны раскрашиваться в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит девочке, чтобы следовать этим правилам, если мальчик рисует только:

- а) равносторонние треугольники;
- б) равнобедренные прямоугольные треугольники;
- в) одинаковые квадраты?

1206. В круге проведены два перпендикулярных друг другу

диаметра AE и BF . На дуге EF взята точка C . Хорды CA и CB пересекают диаметры BF и AE в точках P и Q соответственно (рис.48) Докажите, что площадь четырехугольника $APQB$ равна квадрату радиуса круга.

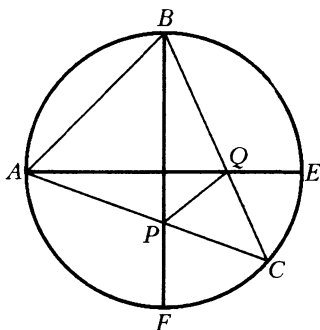


Рис. 48

1207. Докажите, что для любых x, y и любого натурального m выполняется неравенство

$$(x^2 + y^2)^m \geq 2^m x^m y^m + (x^m - y^m)^2.$$

1208. Последовательность чисел

h_n задана условиями $h_1 = \frac{1}{2}$ и $h_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - h_n^2}}{2}}$ для каждого n . Докажите, что сумма любого количества чисел h_n не превосходит 1,03.

1209*. Числовой треугольник, первая строка которого состоит из N единиц, вторая – из $N - 1$ целых чисел, образуется по следующим правилам: для любых четырех чисел a, b, c, d , стоящих в вершинах ромбика (a и c – соседние числа в строке; рис.49), выполняется равенство $ac = bd + 1$. Докажите, что:

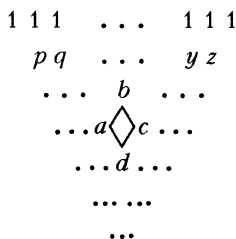


Рис. 49

а) если все числа в треугольнике отличны от 0, то все они целые;

б) если все числа в треугольнике натуральные, то в нем встречается не менее $N/4$ различных чисел.

1210. Имеется кучка из M спичек и лист бумаги, на котором написано число M . Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок берет из кучки или возвращает в кучку от 1 до k спичек и записывает на листе, сколько спичек стало в кучке. (Вначале все имеющиеся спички лежат в кучке – у игроков спичек нет.) Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход или вынужден записать число, уже имевшееся на листе ранее. Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если: а) $k = 2$; б) $k = 5$?

1211. Можно ли расположить в пространстве тетраэдр, шар и плоскость таким образом, чтобы площади сечений тетраэдра и сферы любой плоскостью, параллельной выбранной, были равны?

1212. Множество всех целых чисел разбито на попарно непересекающиеся бесконечные арифметические прогрессии с положительными разностями d_1, d_2, d_3, \dots . Может ли случиться, что

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \dots < 0,9? \quad (*)$$

Рассмотрите два случая:

а) число прогрессий конечно;
 б) число прогрессий бесконечно (при этом условие $(*)$ означает, что сумма любого конечного числа слагаемых в левой части меньше 0,9).

1213. а) Докажите, что если выпуклый шестиугольник можно разрезать на параллелограммы, то он имеет центр симметрии.

б) Докажите, что если выпуклый шестиугольник, в котором каждая диагональ, соединяющая противоположные вершины, параллельна двум сторонам, можно разрезать на N параллелограммов равной площади, то N делится на 3.

1214*. В некоторых клетках прямоугольной таблицы из n строк и $m > n$ столбцов расставлены звездочки так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна звездочка. Докажите, что найдется такая звездочка, что в ее строке звездочек больше, чем в ее столбце.

1215*. Число 15 можно тремя способами разложить в сумму трех натуральных чисел так, что все 9 чисел различны: $15 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 3 + 5 + 7$. Для каждого натурального n обозначим через $k(n)$ наибольшее число троек натуральных чисел, дающих в сумме n и состоящих из $3k(n)$ различных чисел. Докажите, что:

а) $k(n) > \frac{n}{6} - 1$; б) $k(n) < \frac{2n}{9}$; в) $k(100) = 21$;

г) $k(500) = 110$.

1216. Найдите углы остроугольного треугольника ABC , если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC .

1217. Докажите для любого натурального n равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \right)^2 = \\ = 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

1218. На отрезке AC взята точка B и построены дуги $\overset{\frown}{AC} = \alpha$ и $\overset{\frown}{BC} = \beta$, сумма градусных величин которых равна $\alpha + \beta = 360^\circ$, лежащие в одной полуплоскости от прямой AC . Произвольная дуга AB пересекает их в точках K и L (рис.50). Докажите, что всевозможные прямые KL пересекают прямую AC в одной и той же точке.

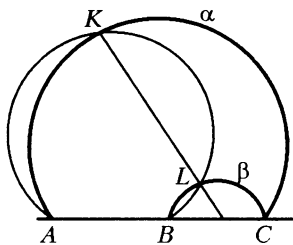


Рис. 50

1219*. Докажите, что для любых n положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n ($n > 1$) справедливо неравенство

$$(x_2 + \dots + x_n)^{x_1} + \dots + (x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n)^{x_i} + \dots + (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^{x_n} > n - 1.$$

Например, для любых положительных чисел x, y, z выполняется неравенство

$$(x + y)^z + (y + z)^x + (z + x)^y > 2.$$

1220*. Определим последовательность $\{b_n\}$ такими условиями: $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $b_{n+1} = b_{n-1} + b_{n-2}$ при $n \geq 3$. Докажите, что при простом p число b_p делится на p .

1221. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении 1:2.

1222. Пусть $m > 1$ – натуральное число, s – наибольшее целое число, для которого $2^s \leq m$. Докажите, что: а) для любых $s + 1$ целых чисел можно выбрать несколько чисел и расставить знаки плюс и минус между ними так, что полученная сумма будет делиться на m ; б) оценка в пункте а) неумлучшаема: существуют такие s целых чисел, что никакая сумма нескольких из них при любой расстановке знаков не делится на m .

1223. На квадратный лист бумаги со стороной a посадили несколько клякс, площадь каждой из которых не больше 1. Докажите, что если каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы, то суммарная площадь клякс не больше a .

1224. Из вершины треугольника проведен отрезок в точку на противоположной стороне, делящийся вписанной окружностью на три равные части. Может ли этот отрезок оказаться: а) высотой; б) медианой; в) биссектрисой треугольника?

1225*. Докажите, что:

а) если для натуральных чисел a и b число $(a^2 + b^2)/(ab - 1)$ натуральное, то оно равно 5;

б) уравнение $x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

1226. Если квадрат повернуть относительно его центра на 45° , то полученный квадрат разделит стороны первоначального в некотором отношении (рис.51,а). Возьмем произвольный выпуклый четырехугольник, разделим его стороны в том же

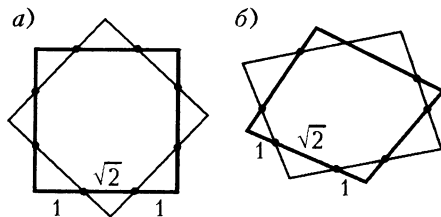


Рис. 51

отношении и через точки деления проведем прямые, образующие новый четырехугольник (рис.51,б). Докажите, что площади этих четырехугольников равны.

1227. Назовем шахматный турнир, в котором m игроков сыграли друг с другом по одной партии, *логичным*, если для любых двух игроков тот, кто набрал не больше очков, не выиграл и в личной встрече. (Напомним, что за выигрыш дается 1 очко, за ничью — $1/2$, за поражение — 0.) Докажите, что каков бы ни был турнир, тот же итог (распределение очков между участниками) можно получить и в некотором логичном турнире.

1228. Докажите для любых положительных чисел a, b, c , не больших 1, неравенство $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

1229. Докажите, что при каждом натуральном $n > 1$ число:

а) $4^n + 5$; б) $8^n + 9$;

в) $a^n + a + 1$, где a — целое и не делится на 8, не является квадратом целого числа.

1230. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

1231. На какое наибольшее число частей могут разбить

плоскость Oxy графики n квадратных трехчленов вида $y = ax^2 + bx + c$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)?

1232. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q . На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну? Рассмотрите следующие случаи:

- а) p и q – взаимно простые числа;
- б) p и q имеют наибольший общий делитель d .

1233. В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна боковой стороне BC , точка H – середина основания AB . Пусть l – прямая, проходящая через H , а P и Q – точки пересечения прямой l с прямыми AD и BD соответственно. Докажите, что углы ACP и QCB равны или составляют в сумме 180° .

1234. Можно ли любой треугольник разбить: а) на 7; б) на 5 подобных между собой треугольников?

1235*. Пусть $p = 2q + 1$ – простое число. Докажите, что число $2^{3q} q! - (-1)^q (2q - 1)!!$ делится на: а) p ; б) p^2 ; в) p^3 (при $p > 3$). (Здесь $q! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q$; $(2q - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2q - 1)$.)

1236. Найдите множество точек O внутри данного квадрата на плоскости, для которых существует окружность с центром O , пересекающая стороны квадрата в 8 точках.

1237. Пусть точка O внутри треугольника ABC такова, что $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$, где K, M, N – основания перпендикуляров, опущенных из O на стороны AB, BC, CA треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{OK + OM + ON}{AB + BC + CA} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

1238. Множество натуральных чисел разбито на две части. В одной из них нет трехчленных арифметических прогрессий. Обязательно ли в другой есть бесконечная арифметическая прогрессия?

1239. Даны две пересекающиеся окружности и точка P (рис. 52). Проведите через точку пересечения окружностей их общую секущую AB так, чтобы угол APB имел заданную величину.

1240*. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 выделен квад-

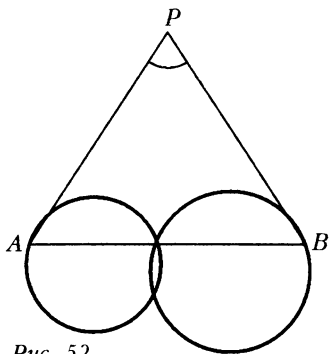


Рис. 52

рат $ABCD$ размером $n \times n$ клеток. Из вершины A в C по линиям сетки проводится случайная ломаная длиной $2n$. В n клетках квадрата, случайно расположенных в разных строках и разных столбцах, расставляются n звездочек. С какой вероятностью все звездочки окажутся по одну сторону от ломаной? (Другими словами, какую долю среди всевозможных расположений ломаных и звездочек составляют такие, что звездочки лежат по одну сторону от ломаной?)

1241. Имеются 1990 кучек, состоящих из 1, 2, 3, ..., 1990 камней соответственно. За один шаг разрешается выбросить из любого множества кучек по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?

1242. На двух сторонах AB и BC правильного $2n$ -угольника взято по точке K и N так, что угол KEN , где E – вершина, противоположная B , равен $180^\circ/(2n)$. Докажите, что NE – биссектриса угла KNC .

1243. а) На доске записано уравнение $*x^2 + *x + * = 0$. Первый из двух играющих называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек. Может ли первый добиться, чтобы полученное уравнение имело различные рациональные корни, или второй всегда сможет ему помешать?

б) На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Первый из двух играющих называет любое число, второй ставит его на место любой из звездочек; затем первый называет еще одно число, второй ставит его на место одной из двух оставшихся звездочек; наконец, первый ставит любое число на место последней оставшейся звездочки. Может ли первый добиться того, чтобы полученное уравнение имело три различных целых корня?

1244. В сенате, состоящем из 30 сенаторов, каждые двое дружат или враждуют, причем каждый враждует ровно с 6 другими. Найдите общее количество троек сенаторов, в которых либо все трое попарно дружат, либо все трое враждуют друг с другом.

1245. На плоскости заданы точка O и n векторов, сумма которых равна нулю. Докажите, что можно отложить эти векторы, начав в точке O , друг за другом в таком порядке, что полученная замкнутая (быть может, самопересекающаяся) ломаная будет целиком расположена внутри или на границе некоторого угла в 60° с вершиной в точке O .

1246. Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии, члены которой – натуральные числа, найдутся два числа с одинаковой суммой цифр.

1247. Можно ли плоскость покрыть без наложений квадрата-

ми с длинами сторон 1, 2, 4, 8, 16, ..., используя квадрат каждого размера не более: а) десяти раз; б) одного раза?

1248. На отрезке находятся несколько меньших отрезков, покрывающих его целиком.

а) Докажите, что левые половины этих отрезков покрывают не менее половины исходного отрезка.

б) Докажите, что если у каждого из этих отрезков отбросить какую-либо половину – левую или правую, – то оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

1249. В королевстве Олимпия $n > 6$ городов, каждые два из которых соединены одной дорогой с односторонним движением. При этом не из каждого города можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

а*) Докажите, что король может выбрать один из городов и, изменив направление движения на всех дорогах, входящих и выходящих из него, добиться того, чтобы можно было проехать из любого города в любой другой.

б) Верно ли это утверждение для $n = 6$?

1250*. Пусть $x_1, x_2, x_2, \dots, x_n$ – положительные числа. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_4 + x_5} + \dots + \frac{x_n}{x_1 + x_2}$$

а) больше $(\sqrt{2} - 1)n$; б) больше $5n/12$;

в) не меньше $n/2$, если последовательность $x_1, x_2, x_2, \dots, x_n$ монотонна.

1251. На плоскости дан угол (меньше развернутого). Проведите два отрезка PM и QM с заданной суммой длин s , отсекающие от угла четырехугольник наибольшей площади (P и Q – точки на сторонах угла, M – точка внутри угла).

1252. Пусть a и n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что количество правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ делится на n .

1253. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M , разбитый на несколько выпуклых многоугольников, – «карта» из нескольких «стран». (Каждые два многоугольника имеют или общую сторону, или общую вершину, или вообще не имеют общих точек.) Будем говорить, что такая карта *реализуема* в пространстве, если она является проекцией «выпуклой шапочки», т.е. если существует выпуклый многогранник, у которого одна из граней – M , а проекции остальных граней на плоскость грани M – страны этой карты (и, быть может, стороны многоугольника M).

а) Постройте пример карты из треугольников, не допускающей реализации в пространстве.

Докажите, что карта допускает выпуклую реализацию в каждом из следующих случаев:

б) все страны – остроугольные треугольники;

в) каждая страна – вписанный многоугольник, содержащий внутри себя центр описанной окружности.

1254. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $m \times n$ клеток, $m \geq n > 1$. Докажите, что его можно разрезать на фигурки из четырех клеток в форме буквы Г в том и только в том случае, если mn делится на 8.

1255. Пусть h – наименьшая высота тетраэдра, d – наименьшее из расстояний между двумя его скрещивающимися ребрами.

Докажите неравенства $\frac{1}{2} < \frac{d}{h} < \frac{3}{2}$.

1256. Две равные окружности касаются друг друга. Постройте такую трапецию, что каждая из окружностей касается трех ее сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях трапеции.

1257*. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причем известно, что для любого целого n число $F(n)$ делится на одно из целых чисел a_1, a_2, \dots, a_m . Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $F(n)$ будет делиться на него для любого целого n .

1258*. С числами, расставленными по окружности, разрешается проделывать следующую операцию: заменить тройку идущих подряд чисел x, y, z на тройку $x + y, -y, z + y$ (именно в таком порядке).

а) Можно ли при помощи этих операций получить из набора двадцати чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10, -1, -2, ..., -9, -10 набор 10, 9, 8, ..., 2, 1, -10, -9, ..., -2, -1?

б) Докажите, что для любого набора из n чисел на окружности, сумма которых положительна, можно получить один и только один набор из n неотрицательных чисел.

1259*. На окружности дано множество E из $(2n - 1)$ различных точек ($n \geq 3$), из которых k точек покрашены в черный цвет, а все остальные – в белый. Раскраска точек называется *хорошей*, если существуют две черные точки, строго между которыми на одной из дуг окружности содержится ровно n точек из множества E . Найдите наименьшее значение k , для которого каждая раскраска точек множества E является хорошей.

1260*. Найдите все целые числа $n > 1$ такие, что $(2^n + 1)/n^2$ – целое число.

1991 ГОД

1261. На плоскости расположены 1991 красных, черных и желтых точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек разного цвета соединены отрезками, причем из каждой точки выходит одинаковое число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, которая соединена и с черной и с желтой точкой.

1262. Пусть d_1, d_2, d_3 – попарные разности длин сторон треугольника (по абсолютной величине), P – его периметр. Докажите неравенство

$$d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1 \leq \frac{P^2}{4}.$$

1263. Внутри окружности лежат еще две окружности, касающиеся внешней окружности в точках A и B соответственно и пересекающиеся между собой. Докажите, что если одна из точек пересечения лежит на отрезке AB , то сумма радиусов меньших окружностей равна радиусу большей. Верно ли обратное?

1264*. На бесконечном белом листе клетчатой бумаги квадрат 2×2 клетки нужно закрасить в черный цвет. Можно ли это сделать несколькими операциями, каждая из которых – перекрашивание в противоположный цвет всех клеток в квадрате 3×3 или 4×4 клетки?

1265*. а) Докажите, что среди 21 попарных расстояний между 7 различными точками плоскости одно и то же число встретится не более 12 раз.

б) Какое наибольшее количество раз может встретиться одно и то же число среди 15 попарных расстояний между 6 различными точками плоскости?

1266. Внутри круга радиусом 1990 с центром в начале координат отмечены 555 точек с целыми координатами, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два треугольника равной площади с вершинами в этих точках.

1267. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – некоторая перестановка из чисел $1, 2, \dots, n$; r_k – остаток от деления числа $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ на n ($k = 1, 2, \dots, n$). Докажите, что среди чисел r_1, r_2, \dots, r_n по крайней мере \sqrt{n} различных (если $n > 2$).

1268. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка X . Прямые AX, BX, CX пересекают стороны BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1 . Пусть $AB_1 \cdot AC_1 \cdot BC_1 \cdot BA_1 \cdot CA_1 \cdot CB_1 = P$. Докажите, что площадь S треугольника $A_1 B_1 C_1$ равна

$S = \sqrt{p}/(2R)$, где R – радиус описанной около треугольника ABC окружности.

1269. На плоскости дан треугольник ABC . Прямая p параллельна прямой AB и расположена на расстоянии AC от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (p и AB), нет внутренних точек треугольника ABC . Прямая q параллельна прямой AC и расположена на расстоянии AB от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (q и AC), нет внутренних точек треугольника ABC . Прямые p и q пересекаются в точке L . Докажите, что прямая AL проходит через середину BC .

1270. Докажите, что если последняя цифра десятичной записи числа m равна 5, то $12^m + 9^m + 8^m + 6^m$ делится на 1991.

1271. Дана полуокружность с диаметром AB . Постройте хорду MN , параллельную AB , так, чтобы трапеция $AMNB$ была описанной.

1272. Докажите, что для любых n положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n , сумма которых равна 1, выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n.$$

1273. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC , как на основаниях, вне его построены подобные равнобедренные треугольники ABC_1 , CBA_1 и CAB_1 , у каждого из которых отношение высоты к основанию равно k . Такие же треугольники ABC_2 , CBA_2 и CAB_2 построены и по другую (внутреннюю) сторону от оснований. Докажите, что площади S , S_1 и S_2 треугольников ABC , $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ связаны соотношением

$$S_1 \pm S_2 = S \left(\frac{1}{2} + 6k^2 \right)$$

(знак «+» или «-» зависит от ориентации треугольника $A_2B_2C_2$ по отношению к треугольнику ABC).

1274. Докажите, что разность между числами

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n-1}}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n-1 + \frac{1}{n}}}}}$$

по модулю не превосходит $\frac{1}{(n-1)!n!}$.

1275*. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ такова, что при любом $k \geq 1$ $a_{k+2} = a_k a_{k+1} + 1$. Докажите, что при $k \geq 9$ число $a_k - 22$ составное.

1276. Для данной хорды MN окружности рассматриваются треугольники ABC , основаниями которых являются диаметры AB этой окружности, не пересекающие MN , а стороны AC и BC проходят через концы M и N хорды MN . Докажите, что высоты всех таких треугольников ABC , опущенные из вершины C на сторону AB , пересекаются в одной точке.

1277. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{a_1 + a_2}{a_3}} + \sqrt{\frac{a_2 + a_3}{a_4}} + \dots + \sqrt{\frac{a_{n-1} + a_n}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_n + a_1}{a_2}} \geq n\sqrt{2}.$$

1278. Имеются n вещественных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющих условиям $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Докажите, что $x_i x_j \leq -\frac{1}{n}$ для некоторых i и j .

1279. На плоскости Oxy расположены n непересекающихся квадратов со стороной 1, стороны которых параллельны осям. Известно, что любые два из них можно пересечь прямой, параллельной одной из осей. Докажите, что можно одной прямой, параллельной оси, пересечь некоторые $n - 2$ квадрата.

1280*. Докажите, что в периоде десятичной дроби $\frac{1}{3^{100}}$ встретится:

- а) не менее 20 одинаковых цифр подряд;
- б) последовательность цифр 123456789.

1281. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше 4.

1282. Докажите, что не существует двух (отличных от параллелограмма) трапеций таких, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой.

1283. Квадрат 99×99 разбит на фигурки трех типов (рис.53).

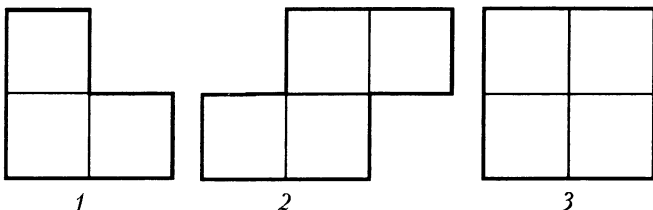


Рис. 53

- а) Докажите, что фигурок первого типа не меньше чем 199.
б) Приведите пример разбиения, когда фигурок первого типа ровно 199.

1284. На основании AB равнобедренного треугольника ACB выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD , имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков CA и CD и отрезка AD (вневыписанная в треугольник ACD). Докажите, что этот радиус равен $1/4$ высоты треугольника, опущенной на боковую сторону.

1285. Имеется колода из n карт, сложенных по порядку: 1, 2, 3, ..., n . Разрешается взять подряд несколько карт и, не меняя порядка, вставить их в любое другое место колоды (можно в начало или в конец). Пусть $M(n)$ – наименьшее число таких операций, необходимое, чтобы сложить карты в обратном порядке. Докажите, что: а) $M(9) \leq 5$; б) $M(52) \leq 27$; в*) $M(52) \geq 17$; г*) $M(52) \geq 27$. Найдите $M(n)$ для любого $n > 2$.

1286. На конгрессе присутствуют 100 делегатов, каждый из которых знает несколько иностранных языков. Известно, что любые трое могут поговорить между собой без помощи остальных. Докажите, что делегатов можно поселить в 50 двухместных номерах гостиницы так, что живущие в одном номере могут разговаривать между собой.

1287. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD . Точка M на диагонали AC такова, что около четырехугольника $BCMD$ можно описать окружность. Докажите, что BD – общая касательная окружностей, описанных около треугольников ABM и ADM .

1288*. Докажите, что число $235^2 + 972^2$ составное.

1289*. Сумма целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n (написанных по окружности) равна 1. Для каждого k от 1 до n через N_k обозначим количество положительных чисел среди n сумм $a_k, a_k + a_{k+1}, \dots, a_k + a_{k+1} + \dots + a_n + a_1 + \dots + a_{k-1}$. Докажите, что все N_k различны.

1290*. Квадратный лист прозрачной бумаги размером 8×8 разграфлен 14-ю прямыми на 64 квадратные клетки 1×1 и произвольным образом сложен по этим линиям в книжку размером 1×1 (из 64 листов). Листы книжки нумеруются по порядку числами 1, 2, ..., 64, а затем она вновь разворачивается. Пусть p – наибольшая разность номеров соседних (граничащих по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение p и при каком складывании оно достигается?

1291. Докажите, что в: а) правильном 12-угольнике; б) правильном 54-угольнике найдутся 4 диагонали, не проходя-

щие через центр многоугольника и пересекающиеся в одной точке.

1292. Совет из 2000 депутатов решил утвердить государственный бюджет, содержащий 200 статей расходов. Каждый депутат подготовил свой проект бюджета, в котором указал по каждой статье максимально допустимую, по его мнению, величину расходов так, чтобы общая сумма расходов не превысила заданную величину S . По каждой статье совет утверждает наибольшую величину расходов, которую согласны выделить не менее k депутатов. При каком наименьшем k можно гарантировать, что общая сумма утвержденных расходов не превысит $S?$

1293. В данный угол вписаны два непересекающихся круга. Треугольник ABC расположен между кругами так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих кругов. Докажите, что сумма радиусов кругов равна высоте треугольника, опущенной из вершины A .

1294. Куб размером $10 \times 10 \times 10$ сложен из 500 черных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков таким образом, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1 \times 1 \times 10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, стало не хватать ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых черных кубиков делится на 4.

1295. На прямоугольном экране размером $m \times n$, разбитом на единичные клетки, светятся более $(m-1)(n-1)$ клеток. Если в каком-либо квадрате 2×2 не светятся три клетки, то через некоторое время погаснет и четвертая. Докажите, что тем не менее на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка.

1296. Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующей операции: разрезав его по отрезку на 2 части, одну из частей перевернуть и приставить к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь общих точек, кроме точек разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?

1297. Числа α и β удовлетворяют равенствам

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 1, \quad \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5.$$

Найдите $\alpha + \beta$.

1298. Билет лотереи – карточка, на которой имеется 50 пустых подряд расположенных клеток. Каждый участвующий в лотерее во все клетки записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют

свою карточку-эталон. Выигравшим считается билет, у которого хотя бы в одной клетке записано такое же число, какое записано в этой же клетке карточки-эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить играющему, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка-эталон?

1299. На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два из них, скажем a и b , и вместо них записать одно число $(a + b)/4$. Эта операция повторяется $n - 1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Докажите, что если на доске первоначально были выписаны n единиц, то в результате всех операций на доске останется число не меньше чем $1/n$.

1300. Следователь придумал план допроса свидетеля, гарантирующий раскрытие преступления. Он собирается задавать вопросы, на которые возможны только ответы «да» или «нет» (то, какой вопрос будет задан, может зависеть от ответов на предыдущие). Следователь считает, что все ответы будут верные; он подсчитал, что в любом варианте ответов придется задать не более 91 вопроса. Покажите, что следователь может составить план с не более чем 105 вопросами, гарантирующий раскрытие преступления и в том случае, если на один вопрос может быть дан неверный ответ (но может быть, что все ответы верные).

1301. Обязательно ли тетраэдр правильный, если у него:

а) пять двугранных углов равны друг другу;

б) восемь плоских углов равны друг другу?

в) Обязательно ли треугольная пирамида $ABCD$ правильная, если ее основание ABC – правильный треугольник и три плоских угла при вершине D равны друг другу?

1302. Докажите, что произведение многочлена $(x + 1)^{n-1}$ на любой многочлен (отличный от нуля) имеет не менее n отличных от нуля коэффициентов.

1303. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ такие, что (при всех $n > 3$)

$$q_n = \frac{q_{n-3} + q_{n-1}}{q_{n-2}}.$$

1304. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC , R – радиус описанной около него окружности. Докажите, что $R^3 \geq IA \cdot IB \cdot IC$.

1305. Даны $2n$ различных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Таблица $n \times n$ заполнена по следующему правилу: в клетке, расположенной на пересечении i -й строки и j -го столбца, записано число $a_i + b_j$. Докажите, что если во всех столбцах

произведения чисел одинаковы, то во всех строках они тоже одинаковы.

1306. Назовем *вытянутостью* прямоугольника отношение большей стороны к меньшей. Докажите, что вытянутость прямоугольника B , вписанного в другой прямоугольник A (так, что вершины B лежат по одной на сторонах прямоугольника A), не меньше вытянутости A .

1307. Докажите, что при любом натуральном n число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ имеет не менее n различных простых множителей.

1308. На плоскости даны три прямые. Найдите множество центров правильных треугольников, вершины которых лежат на данных прямых (по одной на каждой из трех прямых). Исследуйте все случаи взаимного расположения данных прямых.

1309. На плоскости задан треугольник. Для произвольной точки M плоскости определяется 1-й «залп»: множество $H_1(M)$ из трех точек – середин отрезков, соединяющих M с вершинами треугольника, затем 2-й залп: множество $H_2(M)$ из 9 точек – середин отрезков, соединяющих точки $H_1(M)$ с вершинами треугольника, и так далее (k -й залп $H_k(M)$ состоит из 3^k точек – середин отрезков, соединяющих точки $H_{k-1}(M)$ с вершинами треугольника). Докажите, что для любого $\epsilon > 0$ для данного треугольника можно указать фигуру площади меньше ϵ такую, что для любой точки M найдется номер $k = k(M, \epsilon)$, начиная с которого весь «салют» $H_k(M)$, $H_{k+1}(M)$, ... не будет выходить за пределы этой фигуры.

1310*. В соревнованиях участвуют 2^k боксеров ($k > 1$). Ежедневно встречаются 2^{k-1} пары боксеров (так что каждый проводит один бой). Все боксеры имеют разную силу, и в каждом бою побеждает сильнейший. Докажите, что за $k(k+1)/2$ дня можно определить место каждого боксера. (Расписание на каждый день составляется накануне вечером и не меняется в день соревнований.)

1311. Треугольник имеет целые длины сторон x , y , z , причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2$ – квадрат целого числа.

1312*. Поля доски $n \times n$ раскрашены в три цвета – синий, белый, красный, причем известно, что рядом с каждой синей клеткой есть (граничащая по стороне) белая, рядом с белой – красная и рядом с красной – синяя. Докажите для количества k

клеток одного – скажем, красного – цвета оценки: а) $k \leq 2n^2/3$;
б) $k \geq n^2/11$.

1313. Найдите 8 натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_8 таких, что

$$\sqrt{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1 - 1}} + \sqrt{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_2 - 1}} + \dots + \sqrt{\sqrt{a_8} - \sqrt{a_8 - 1}} = 2.$$

1314. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а P и Q – центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CDM соответственно. Докажите, что $AD + CD \leq 4PQ$.

1315. На окружности расставляются целые числа. Разрешается стереть любое четное число, а вместо двух соседних с ним чисел записать их сумму (отчего количество чисел уменьшается на два). Такие операции проводятся, пока это возможно, т.е. пока не останется ни одного четного числа либо останутся одно или два числа. Докажите, что количество оставшихся чисел зависит лишь от исходной расстановки, но не от порядка действий.

1316. Докажите, что арифметическая прогрессия из различных натуральных чисел, ни одно из которых не содержит в своей десятичной записи цифру c , состоит:

а) при $c \neq 0$ не более чем из 72 чисел;

б) при $c = 0$ не более чем из 80 чисел.

Достигаются ли эти оценки?

1317. Докажите для любого треугольника ABC неравенство

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leq \frac{8}{27},$$

где I – центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C – длины биссектрис треугольника ABC .

1318. Дан связный граф с n ребрами. Докажите, что его ребра можно пометить числами от 1 до n так, что для каждой вершины, из которой выходит не менее двух ребер, числа, стоящие на этих ребрах, не имеют общего делителя, большего 1. (Граф – это система точек, некоторые пары которых соединены ребрами. Граф называется связным, если по его ребрам можно из любой вершины пройти в любую другую.)

1319. Даны треугольник ABC и точка M внутри него. Докажите, что хотя бы один из углов MAB, MBC, MCA меньше или равен 30° .

1320*. Для произвольного заданного числа $\alpha > 1$ постройте бесконечную ограниченную последовательность x_1, x_2, \dots такую, что при любых m, n ($m \neq n$) выполняется неравенство $|x_m - x_n| |m - n|^\alpha \geq 1$.

1321. Ладья побывала во всех клетках шахматной доски размерами $n \times n$ клеток. Докажите, что она должна была при этом изменить направление движения не менее $2n - 2$ раз. (Ладья движется параллельно сторонам квадрата.)

1322. Три отрезка, выходящие из разных вершин треугольника ABC и пересекающиеся в одной точке M , делят его на шесть треугольников. В каждый из них вписана окружность. Оказалось, что четыре из этих шести окружностей равны. Следует ли отсюда, что треугольник ABC правильный, если M — точка пересечения: а) медиан; б) высот; в) биссектрис; г) M — произвольная точка внутри треугольника?

1323. Докажите для любых положительных чисел x и y неравенство $x \cdot 2^y + y \cdot 2^{-x} \geq x + y$.

1324. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится: а) на 5, на 11 и на 17; б) на число вида $6m - 1$ (m — произвольное натуральное число).

1325. а) На плоскости даны три точки A, B, C . Пусть O — их центр тяжести (точка пересечения медиан треугольника ABC). При повороте вокруг точки O на угол 120° точка B переходит в точку P , а при повороте на 240° (в том же направлении) точка C переходит в точку Q . Докажите, что треугольник APQ — правильный (либо точки A, P и Q совпадают).

б*) Для произвольного набора q точек A_0, A_1, \dots, A_{q-1} на плоскости ($q \geq 1$) определим следующую операцию: строим центр тяжести O данных точек и поворачиваем каждую точку A_k вокруг O на угол $2\pi k/q$ в новое положение A'_k ($k = 0, 1, \dots, q-1$). С полученным набором q точек $A'_0 = A_0, A'_1, \dots, A'_{q-1}$ сделаем такую же операцию еще раз и так далее. Докажите, что через $q - 1$ повторений получится набор из q совпадающих точек.

1326. Последовательность $\{a_n\}$ определяется по следующим правилам: $a_0 = 9, a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$ для любого $k > 0$. Докажите, что a_{10} содержит более 1000 девяток (в десятичной записи).

1327. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. Пусть при этом

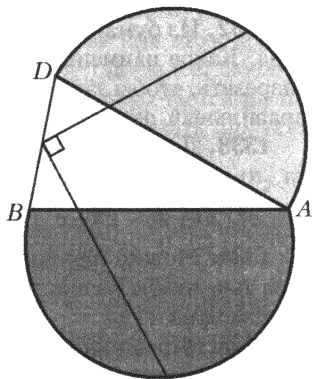


Рис. 54

повороте точка B перешла в точку D (рис.54). Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD , перпендикулярны друг другу.

1328. Вещественные числа x_1, x_2, \dots, x_n принадлежат отрезку $[-1; 1]$, причем сумма кубов этих чисел равна 0. Докажите, что сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ не превосходит $n/3$.

1329. Докажите, что в выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ три прямые, соединяющие середины противоположных сторон (т.е. таких, что их концы не соединены никакой стороной этого шестиугольника), пересекаются в одной точке в том и только в том случае, если площади треугольников ACE и BDF равны.

1330. На плоскости проведены n прямых общего положения (никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не меньше: а) $n/3$; б) $(n-1)/2$; в*) $n-2$ треугольников.

1331. Отрезки AK, BM, CN, DL делят квадрат $ABCD$ со стороной 1 на четыре треугольника с площадями S_1, S_2, S_3, S_4 и пять четырехугольников (рис. 55); площадь центрального четырехугольника равна S_0 , причем $S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Докажите

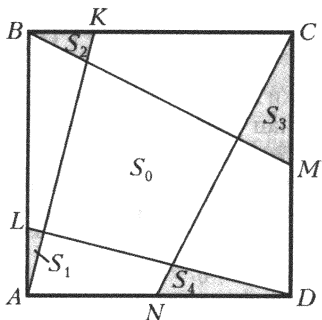


Рис. 55

равенство

$$AL + BK + CM + DN = 2.$$

1332. Из бумаги склеены два одинаковых правильных тетраэдра. Какое наименьшее число ребер этих тетраэдров придется разрезать, чтобы затем склеить их по разрезанным ребрам в один правильный октаэдр?

1333. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполняется неравенство

$$a^2(2b + 2c - a) + b^2(2c + 2a - b) + c^2(2a + 2b - c) \geq 9abc.$$

1334. Можно ли числа $1, 2, \dots, 10$ разбить на два подмножества так, чтобы разность произведений чисел этих подмножеств делилась на 11?

1335. Предположим, что n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разломить не более одного раза.

а) При каких n это возможно, если $m = 9$?

б) При каких n и m это возможно?

1336. Докажите для любых натуральных чисел m и n , больших 1, неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} > 1.$$

1337. Выпуклая фигура на плоскости имеет 4 оси симметрии (углы между соседними осями составляют 45°). Через одну точку фигуры проведены параллельные этим осям прямые, которые делят фигуру на 8 частей, раскрашенных поочередно в голубой и розовый цвета (рис.56). Докажите, что сумма площадей голубых частей равна сумме площадей розовых.

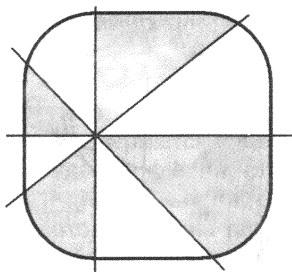


Рис. 56

1338. Укажите способ вычисления 2^n -го числа f_{2^n} последовательности Фибоначчи: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ ($k > 1$) не более чем за $6n$ операций сложения, умножения и вычитания.

1339. Дан треугольник ABC . Пусть S – его площадь, γ – угол ACB , а l – длина биссектрисы, проведенной из вершины C .

а) Докажите, что $S \geq l^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

б) Для каких треугольников ABC выполняется равенство?

1340. На красной окружности произвольным образом отмечены $N \geq 4$ различных синих точек. Начиная с какой-нибудь из них будем перекрашивать каждую вторую синюю точку (по часовой стрелке) в красный цвет, соединяя ее при этом хордой со следующей перекрашиваемой точкой, и так далее, пока на окружности не останется синих точек. На сколько частей распадается внутренность окружности, если ее разрезать по всем проведенным линиям, при: а) $N = 32$; б) $N = 1992$?

1341. Пусть m , n и k – натуральные числа, причем $m > n$. Какое из двух чисел больше:

а) $\sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m + \dots}}}$ или $\sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n + \dots}}}$;

б) $\sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n}}}}$ или $\sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{m + \dots + \sqrt{m}}}}$

(в каждом числе – k знаков корня)?

1342. Напишем строчку из n чисел от 1 до n . Под ней напишем

вторую строчку из n чисел: сначала — числа, стоящие в первой строчке на нечетных местах (по порядку), а затем числа, стоящие на четных местах (тоже по порядку). Далее будем писать следующие строчки по тому же правилу до тех пор, пока на некотором шаге не получится m -я строчка, совпадающая с первоначальной. Докажите, что такая строчка встретится и $m \leq n$.

1343. Три хорды окружности γ попарно пересекаются в точках A, B, C . Построим еще три окружности: одна касается сторон угла CAB и окружности γ (изнутри) в точке A_1 , вторая — сторон угла ABC и окружности γ (изнутри) в точке B_1 , третья — сторон угла ACB и окружности γ (изнутри) в точке C_1 . Докажите, что три отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (рис.57).

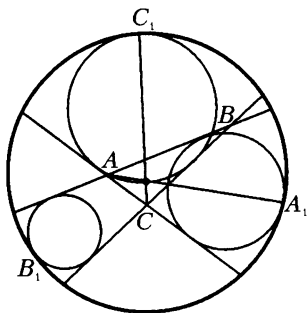


Рис. 57

1344. Том Сойер красит забор, состоящий из бесконечной последовательности прямоугольных досок разной высоты и ширины. Каждая

доска на 1% уже, чем предыдущая, и выше предыдущей, однако не выше 2 м. Том начинает с первой доски и затем, если доска выше предыдущей более чем на 2%, красит ее, а в противном случае — пропускает. Может ли забор быть таким, что он покрасит не менее: а) 40%; б) 50%; в) 60% площади забора?

1345. На гиперболе $y = 1/x$ взяты две точки $M(x_0; y_0)$ и $N(-x_0; -y_0)$, симметричные относительно начала координат. Окружность с центром M , проходящая через точку N , пересекает гиперболу еще в трех точках. Докажите, что эти точки лежат в вершинах правильного треугольника.

1346. Внутри окружности радиусом 1 расположена замкнутая (самопересекающаяся) ломаная, содержащая 51 звено, причем длина каждого звена равна $\sqrt{3}$. Для каждого угла этой ломаной рассмотрим треугольник, двумя сторонами которого служат стороны этого угла (таких треугольников всего 51). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше, чем утроенная площадь правильного треугольника, вписанного в окружность.

1347. Имеются 100 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 101 золотая монета, также упорядоченные по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряже-

нии — двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее. Как за наименьшее число взвешиваний найти монету, занимающую по весу 101-е место? Укажите это число и докажите, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.

1348. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC . Построим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 которого параллельны отрезкам PA , PB , PC соответственно. Через точки A_1 , B_1 , C_1 проведены прямые, параллельные BC , CA и AB соответственно. Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$.

1349*. Круг разбит на n секторов. В некоторых из них стоят фишки; всего фишек $n + 1$. Затем позиция подвергается следующим преобразованиям: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы. Докажите, что после некоторого числа таких преобразований не менее половины секторов будет занято фишками.

1350*. Пусть n и b — натуральные числа. Через $V(n, b)$ обозначим число разложений n в произведение одного или нескольких сомножителей, каждый из которых больше b (например: $36 = 6 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 12$, так что $V(36, 2) = 5$). Докажите, что $V(n, b) < n/b$.

1351. Пусть в прямоугольном треугольнике AB и AC — катеты, $AC > AB$. На AC выбрана точка E , а на BC — точка D так, что $AB = AE = BD$. Докажите, что треугольник ADE будет прямоугольным в том и только в том случае, если стороны треугольника ABC относятся как 3:4:5.

1352. Назовем n чисел близкими, если каждое из них меньше, чем сумма этих чисел, деленная на $n - 1$. Пусть a, b, c, \dots — n близких чисел, S — их сумма. Докажите, что:

а) все они положительны;

б) всегда $a + b > c$;

в) всегда $a + b \leq S/(n - 1)$.

1353. Дана таблица $n \times n$, заполненная числами по следующему правилу: в клетке, стоящей в i -й строке и j -м столбце таблицы, записано число $1/(i + j - 1)$. В таблице отметили n чисел таким образом, что никакие два отмеченных числа не находятся в одном столбце или в одной строке. Докажите, что сумма отмеченных чисел не меньше 1.

1354. Даны три треугольника: $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$. Известно, что их центры тяжести (точки пересечения медиан) лежат на одной прямой и никакие три из девяти вершин этих треугольников не лежат на одной прямой. Рассмотрим 27 треугольников вида $A_iB_jC_k$, где i, j, k независимо пробегает значения 1, 2, 3. Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на две группы так, что сумма площадей треугольников первой группы будет равна сумме площадей треугольников второй группы.

1355. Докажите, что если число $a = 2^{2k} + 2^k + 1$ не является делителем числа $2^{2^{k+1}} - 1$, то a — составное.

1356. Докажите, что если $abc = 4Rr r_c$, где a, b, c — стороны треугольника, R, r, r_c — радиусы описанной, вписанной и одной из вневписанных окружностей, то треугольник — прямоугольный. (Вневписанная окружность касается стороны и продолжений двух других сторон.)

1357. Докажите, что оба числа $91! \cdot 1901! - 1$ и $92! \cdot 1900! + 1$ делятся на 1993.

1358. Назовем *куббондом* шестигранник, все грани которого — четырехугольники. Докажите, что если три из четырех его диагоналей (не лежащих на его гранях) пересекаются в одной точке, то и четвертая проходит через эту точку.

1359. Пусть $0 < a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$. Докажите, что уравнение $a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx = 0$ имеет на отрезке $[0; \pi]$: а) хотя бы один корень; б*) ровно n корней.

1360. Обозначим через $p_{m,n}$ число различных покрытий шахматной доски размером $m \times n$ клеток $mn/2$ костями домино (прямоугольниками 1×2 клетки; разумеется, мы считаем одно из чисел m и n четным).

а) Докажите, что $p_{2,n} = f_n$ — последовательность, задаваемая соотношением $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ (последовательность Фибоначчи).

б*) Докажите, что (для четных n) верны оценки

$$(3/2)^{n^2/2} < p_{n,n} < 2^{n^2/2}.$$

1361. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ACB проведена высота CD , и в треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами P и Q . Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает катеты AC и BC в точках M и N соответственно, а высоту CD — в точке K . Докажите, что:

а) треугольники CMN и ABC подобны;

б) точки C , M , N , P и Q лежат на одной окружности с центром K , радиус которой равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC .

1362. Докажите, что если натуральное число a взаимно просто с 10, то для любого M найдется n , для которого сумма цифр числа a^n больше M (другими словами, сумма цифр числа a^n не ограничена).

1363. Можно ли n раз рассадить $2n + 1$ человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза, если: а) $n = 5$; б) $n = 4$; в) n – произвольное натуральное число?

1364. Пусть $a + b + c = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Докажите неравенства:

а) $4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 15abc \geq 1$;

б) $a^3 + b^3 + c^3 + abcd \geq \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{9} + \frac{d}{27} \right\}$

(здесь $\min \{x, y\}$ – наименьшее из чисел x , y).

1365. Каждая грань выпуклого многогранника – многоугольник с четным числом сторон. Обязательно ли его ребра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну ребер разных цветов?

1366. Точки M и N – середины сторон CD и DE пятиугольника $ABCDE$, в котором $BC \parallel AD$ и $BD \parallel AE$. Докажите, что площади четырехугольника $MDNO$ и треугольника ABO равны (O – точка пересечения отрезков BN и AM).

1367. В некоторой стране между городами существует авиационное сообщение. В стране $2k + 1$ авиакомпания, причем первая осуществляет один рейс, вторая – два рейса и так далее (каждый рейс связывает между собой два города). В стране существует закон, согласно которому из каждого города не может выполняться более одного рейса каждой авиакомпанией. Компании решили по-новому поделить между собой все рейсы так, чтобы каждая авиакомпания осуществляла одинаковое число рейсов. Докажите, что это можно сделать, не нарушая закона.

1368. а) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . Пусть O , O_1 , O_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC , ABD и ADC соответственно. Докажите, что точки O , O_1 , O_2 и A лежат на одной окружности.

б) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D , не

являющаяся ее серединой. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и ADC соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к медиане AK треугольника ABC делит отрезок O_1O_2 пополам.

1369. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{z} = c - zx, \\ \frac{b}{y} - \frac{c}{x} = a - xy, \\ \frac{c}{z} - \frac{a}{y} = b - yz, \end{cases}$$

где a, b, c — положительные параметры.

1370. Рассматриваются наборы из n различных гирек. Масса каждой гирьки — целое число граммов, не превосходящее 21 г. При каком наименьшем n в любом таком наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга?

1371. На окружности с центром O расположены точки A и B . Точка P находится на меньшей из дуг AB , точки Q и R симметричны точке P относительно прямых OA и OB соответственно, P' — точка пересечения отрезков AR и BQ . Докажите, что точки P и P' симметричны относительно прямой AB .

1372. Имеется прибор, позволяющий находить все действительные корни любого кубического многочлена $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Придумайте, как с помощью этого прибора решить систему

$$\begin{cases} x = P(y), \\ y = P(x). \end{cases}$$

1373. Дана плоскость, пересекающая сферу с центром O по окружности. На сфере по разные стороны от плоскости взяты точки A и B , причем радиус OA перпендикулярен данной плоскости. Через прямую AB проводится произвольная плоскость. Она пересекает окружность в точках X и Y . Докажите, что произведение $BX \cdot BY$ не зависит от выбора такой плоскости.

1374. Найдите все натуральные числа k , $k > 1$, удовлетворяющие условию: для некоторых натуральных m и n , $m \neq n$, числа $k^m + 1$ и $k^n + 1$ получаются друг из друга перестановкой в обратном порядке цифр десятичной записи этих чисел.

1375. В кинотеатре m рядов по n мест в каждом. Рассеянный кассир продал mn билетов, не следя за тем, чтобы они были проданы на разные места. Оказалось, что зрителей можно рассадить в зале так, чтобы у каждого в билете был правильно указан хотя бы один из номеров – ряда или места.

а) Докажите, что зрителей можно рассадить так, чтобы хотя бы у одного из них были правильно указаны оба номера, а для остальных выполнялось прежнее условие.

б) Какое наибольшее количество зрителей можно заведомо посадить на свои места с сохранением прежнего условия для остальных?

1376. В пространстве даны 9 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Все эти точки попарно соединены отрезками. Отрезок может быть закрашен в синий или красный цвет или остаться незакрашенным. Найдите наименьшее значение n такое, что при любом закрашивании любых n отрезков найдется треугольник, все стороны которого будут закрашены в один цвет.

1377. На плоскости даны окружность C , прямая l , касающаяся C , и точка M на l . Найдите множество всех точек P , удовлетворяющих следующему условию: существуют две точки Q, R , лежащие на l , такие, что M – середина QR , и окружность C вписана в треугольник PQR .

1378*. Пусть $Oxyz$ – прямоугольная система координат в пространстве, S – конечное множество точек пространства и S_x, S_y, S_z – множество ортогональных проекций S на плоскости Oyz, Ozx, Oxy соответственно. Докажите, что $|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$. (Через $|A|$ обозначается количество элементов конечного множества A . Ортогональная проекция точки на плоскость есть основание перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость.)

1379. Для любого положительного целого числа n через $S(n)$ обозначим наибольшее целое число такое, что при любом целом $k, 1 \leq k \leq S(n)$, число n^2 может быть представлено в виде суммы k квадратов целых положительных чисел.

а) Докажите, что $S(n) \leq n^2 - 14$ при любом $n \geq 4$.

б) Найдите целое число n такое, что $S(n) = n^2 - 14$.

в) Докажите, что существует бесконечно много целых чисел n таких, что $S(n) = n^2 - 14$.

1380*. Докажите, что число $\frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$ является составным.

1993 ГОД

1381. Окружность разбита $2n$ точками на равные дуги. Докажите, что у любой замкнутой ломаной линии из $2n$ звеньев с вершинами во всех этих точках есть два параллельных звена.

1382. Все точки плоскости раскрашены в два цвета – черный и белый – произвольным образом. Докажите, что найдется треугольник с вершинами одного цвета и меньшей стороной длины 1, отношение углов которого равно:

а) 1:2:3; б) 1:2:4.

1383. Пусть сумма n чисел равна 0, причем m – наименьшее из них, а M – наибольшее. Докажите, что:

а) сумма квадратов этих чисел не превосходит $-mMn$;

б) сумма четвертых степеней этих чисел не превосходит $-mMN(m^2 + M^2 + mM)$.

1384*. Пусть ABC – неравносторонний остроугольный треугольник, O и I – центры описанного и вписанного кругов, H – ортоцентр треугольника. Докажите, что четырехугольники $AOIH$, $BOIH$ и $COIH$ невырождены и среди них ровно два выпуклых.

1385*. Пусть ABC – произвольный треугольник. Докажите, что:

а) для любого правильного треугольника $A_1B_1C_1$ выполняется неравенство

$$A_1A^2 + B_1B^2 + C_1C^2 \geq \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}} S_{ABC};$$

б) существует правильный треугольник $A_1B_1C_1$, для которого это неравенство превращается в равенство.

1386. Клетки квадрата 7×7 раскрашены в два цвета. Докажите, что найдется по крайней мере 21 прямоугольник с вершинами в центрах клеток одного цвета и со сторонами, параллельными сторонам квадрата.

1387. Окружность, вписанная в угол с вершиной O , касается его сторон в точках A и B . Луч OX пересекает эту окружность в двух точках C и D так, что $OC = CD = 1$. Если M – точка пересечения луча OX и отрезка AB , то чему равна длина отрезка OM ?

1388. Даны различные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$, старшие коэффициенты которых равны единице. Известно, что $f(1) + f(10) + f(100) = g(1) + g(10) + g(100)$. При каких x выполняется равенство $f(x) = g(x)$?

1389. Во взводе национальной гвардии служат сержанты и рядовые, причем каждый рядовой подчинен одному или двум сержантам. Докажите, что можно уволить в запас не более половины взвода так, что каждым оставшимся рядовым будет командовать ровно один сержант.

1390*. На плоскости расположены несколько единичных кругов. Верно ли, что всегда можно отметить несколько точек так, что внутри каждого круга будет находиться ровно одна отмеченная точка?

1391. а) На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 ; A_2 , B_2 , C_2 – середины отрезков B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

б) Докажите аналогичное утверждение, если ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 – подобные равнобедренные треугольники (с основаниями AB , BC , CA).

1392. На плоскости задан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD = 1$. Положение точек B и C фиксировано, точки же A и D подвергаются следующим преобразованиям (сохраняющим длины отрезков AB , CD и AD): новое положение точки A получается из старого симметрией относительно прямой BD , затем новое положение точки D получается из старого симметрией относительно прямой AC (где A уже занимает новое положение), затем опять A отражается относительно BD (D – уже новое), затем вновь отражается D и так далее. Докажите, что после нескольких отражений положение всех точек совпадает с первоначальным.

1393*. В таблице m строк и n столбцов. «Горизонтальным ходом» называется такая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остается в той строке, в которой он был и до перестановки; аналогично определяется «вертикальный ход» («строка» в предыдущем определении заменяется на «столбец»). Укажите такое k , что за k ходов (любых) можно получить любую перестановку элементов таблицы, но существует такая перестановка, которую нельзя получить за меньшее число ходов.

1394*. Число ребер многогранника равно 100.

а) Какое наибольшее число ребер может пересечь плоскость, не проходящая через его вершины, если многогранник выпуклый?

Докажите, что для невыпуклого многогранника это число:

б) может быть больше 96;

в) но не может равняться 100.

1395. Назовем человека *малообщительным*, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека *чудаком*, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

1396. Докажите, что для любых положительных чисел a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq \frac{AB}{A + B},$$

где $A = a_1 + \dots + a_n$, $B = b_1 + \dots + b_n$.

1397*. По контуру каждой грани выпуклого многогранника ползает муравей (таким образом, муравьев столько же, сколько граней), и все муравьи движутся, обходя свою грань по часовой стрелке. Известно, что их скорости в любой момент времени не меньше 1 мм/ч. Докажите, что рано или поздно какие-то два муравья столкнутся.

1398. На множестве M натуральных чисел от 1 до 1993 определена операция $*$, которая каждым двум числам a и b из множества M ставит в соответствие некоторое число $a * b$, также принадлежащее M . Известно, что для любых чисел a и b из M выполняется равенство $(a * b) * a = b$. Докажите, что найдется число a такое, что $a * a = a$.

1399. Каким может быть период суммы двух бесконечных периодических дробей, имеющих периоды: а) 6 и 12; б) 12 и 20?

1400*. Внутри правильного тетраэдра с ребром a летает муха. Какой наименьший замкнутый путь должна пролететь муха, чтобы побывать на всех гранях тетраэдра?

1401. На дуге BC окружности, описанной около треугольника ABC (дуга не содержит A), взята точка K . Пусть NK и MK – биссектрисы треугольников AKB и AKC . Докажите, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC .

1402. Докажите для положительных чисел $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ($n > 2$) неравенство

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_1}{x_n}.$$

1403. Каждая сторона $A_k A_{k+1}$ выпуклого n -угольника $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n > 4$) продлевается на равную ей длину $A_{k+1} B_k = A_k A_{k+1}$. Докажите, что площадь полученного n -уголь-

ника $B_1B_2 \dots B_n$ не более чем в 5 раз превосходит площадь исходного.

1404. Три числа x, y, z удовлетворяют условиям $x + y + z = 0$, $xyz = 2$. Найдите максимум величины $x^2/y + y^2/z + z^2/x$.

1405. В основании пирамиды лежит правильный n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$, а точка B – вершина пирамиды. Известно, что углы BA_1A_2 , BA_2A_3 , ..., $BA_{n-1}A_n$, BA_nA_1 равны. Докажите, что пирамида правильная.

1406. На доске написаны n выражений вида $*x^2 + *x + * = 0$ (n – нечетное число). Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается заменить одну из звездочек числом, не равным нулю. Через $3n$ ходов получится n квадратных уравнений. Первый игрок стремится к тому, чтобы как можно большее число этих уравнений не имело корней, а второй хочет ему помешать. Какое наибольшее число уравнений, не имеющих корней, может получить первый игрок независимо от игры второго?

1407. В семейном альбоме есть: а) десять; б) n фотографий. На каждой из них изображены три человека: в центре стоит мужчина, слева от мужчины – его сын, а справа – его брат. Какое наименьшее количество различных людей может быть изображено на этих фотографиях, если известно, что все десять (соответственно, n) мужчин, стоящих в центре, различны?

1408. За круглым столом сидит компания из тридцати человек. Каждый из них либо дурак, либо умный. Всех сидящих спрашивают: «Кто ваш сосед справа – умный или дурак?» В ответ умный говорит правду, а дурак может сказать как правду, так и ложь. Известно, что количество дураков не превосходит F . При каком наибольшем значении F всегда можно, зная эти ответы, указать на умного человека в этой компании?

1409. Докажите, что существует такое натуральное число n , что если правильный треугольник со стороной n разбить прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1, то среди вершин этих треугольников можно выбрать $1993n$ точек, никакие три из которых не являются вершинами правильного треугольника (не обязательно со сторонами, параллельными сторонам исходного треугольника).

1410. а) Верно ли, что любые два прямоугольника равной площади можно расположить на плоскости так, что любая горизонтальная прямая, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по отрезку той же длины?

б) Докажите, что если два прямоугольных параллелепипеда

имеют равные объемы, то их можно расположить в пространстве так, что любая горизонтальная плоскость, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по многоугольнику той же площади.

1994 ГОД

1411. На острове Невезения каждый житель либо всегда говорит правду, либо всегда лжет, причем правдивых не менее четверти всех жителей. На выборах президента, в которых участвовали все невезенцы, было только два кандидата – Елкин и Палкин. На вопрос наблюдателя ООН «за кого Вы голосовали?» большинство невезенцев ответили: «за Палкина», – а на вопрос «кто победил?» большинство ответили: «Елкин».

а) Кто победил на выборах?

б) Можно ли это наверняка определить, если правдивых и голосовавших за проигравшего кандидата на острове – лишь одна пятая всех жителей?

1412. Натуральные числа x и y таковы, что сумма дробей

$$\frac{x^2 - 1}{y + 1} + \frac{y^2 - 1}{x + 1}$$

– целое число. Докажите, что каждая из дробей – целое число.

1413. Точка M – середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что величина угла AMD равна 120° . Докажите неравенство

$$AB + \frac{1}{2}BC + CD \geq DA.$$

1414. Докажите, что существует функция $f(x)$, определенная при всех $x \geq 0$ и такая, что значение $f(f(f(\dots(x))))$ (где функция f применяется n раз) равно: а) $\frac{x}{x+1}$; б) $1 + x + 2\sqrt{x}$.

1415*. Даны два правильных 10-угольника. В каждой вершине того и другого написано натуральное число, причем сумма чисел на каждом 10-угольнике равна 99. Докажите, что можно отметить на том и другом 10-угольнике несколько подряд стоящих вершин (может быть, одну, но не все) так, что суммы отмеченных чисел будут одинаковы.

1416*. Среди бесконечного количества гангстеров каждый охотится за каким-то одним из остальных. Докажите, что существует бесконечное подмножество этих гангстеров, в котором ни один не охотится за кем-либо из этого подмножества.

1417*. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны точки D и E . Известно, что равны такие отношения величин углов:

$$\frac{\angle CDE}{\angle BDE} = \frac{\angle CED}{\angle AFD}.$$

Верно ли, что треугольник ABC равнобедренный, если AE и BD : а) медианы; б) высоты; в) биссектрисы этого треугольника?

1418. На плоскости задано конечное множество векторов с длинами не больше 1 и суммой S . Докажите, что для любого числа λ между 0 и 1 найдется некоторое подмножество этих векторов, сумма которых отличается от λS на вектор длиной не больше $1/\sqrt{2}$.

1419. Пусть $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, где $n > 1$. Докажите, что многочлен $f(x)$ нельзя представить в виде произведения многочленов степени больше 1 с целыми коэффициентами.

1420*. Для любых трех точек P, Q, R плоскости обозначим через $m(PQR)$ наименьшую из высот треугольника PQR . (Если точки P, Q, R лежат на одной прямой, то $m(PQR) = 0$.) Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, X плоскости

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

1421. а) В выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого углы при вершинах B и D прямые, вписан четырехугольник с периметром P (его вершины лежат по одной на сторонах четырехугольника $ABCD$). Докажите неравенство $P \geq 2BD$.

б) В каких случаях это неравенство превращается в равенство?

1422. Докажите, что числа 312500051 и 1280000401 – составные.

1423. Три шахматиста A, B и C сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Может ли случиться, что по числу очков A занял первое место, C – последнее, а по числу побед, наоборот, A занял последнее место, C – первое (за победу присуждается одно очко, за ничью – полочка)?

1424. В строчку выписаны 10 целых чисел. Вторая строчка находится так: под каждым числом A первой строчки пишется число, равное количеству чисел первой строчки, которые больше A и при этом стоят правее A . По второй строчке аналогично строится третья строчка и так далее.

а) Докажите, что все строчки, начиная с некоторой, нулевые (состоят из сплошных нулей).

б) Каково максимально возможное число ненулевых строчек (содержащих хотя бы одно число, отличное от нуля)?

1425. Дан невыпуклый несамопересекающийся четырехугольник, который имеет три внутренних угла по 45° . Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата.

1426. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр числа n (в десятичной записи). Существуют ли три различных числа m , n и p таких, что $m + S(m) = n + S(n) = p + S(p)$?

1427. В каждой клетке квадрата 8×8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связанных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Может ли количество этих частей быть: а) больше 15; б) больше 20? в) Может ли в аналогичной задаче про квадрат $n \times n$ клеток получиться больше чем $n^2/4$ частей (для $n > 8$)?

1428. Подряд выписаны десятичные записи всех натуральных чисел, начиная с единицы, до некоторого n включительно: 12345678910111213...(n). Существует ли такое n , что в этой записи все десять цифр встречаются одинаковое количество раз?

1429. Выпуклый многоугольник разрезан на выпуклые семиугольники (так, что каждая сторона многоугольника является стороной одного из семиугольников.) Докажите, что найдутся четыре соседние вершины многоугольника, принадлежащие одному семиугольнику.

1430. Монотонно возрастающая последовательность целых чисел $\{a_n\}$ обладает тем свойством, что для любой пары взаимно простых чисел p и q выполняется равенство $a_{pq} = a_p a_q$; кроме того, известно, что $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

а) Докажите, что $a_3 = 3$.

б) Докажите, что $a_n = n$ для любого натурального n .

1431. С натуральным числом проделывается следующая операция: его последняя цифра отделяется, умножается на 4 и прибавляется к оставшемуся числу (скажем, из 1993 получается 211). С полученным числом проделывается то же самое и так далее. Докажите, что если в полученной последовательности встретилось 1001, то в ней нет ни одного простого числа.

1432. Докажите, что для любой последовательности положительных чисел a_n целые части квадратных корней из чисел $b_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n)$ все различны.

1433. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник. На лучах BA и DC отложим отрезки BM и DP длиной $(AB + CD)/2$. Аналогично, на лучах CB и AD отложим отрезки CN и AQ длиной $(BC + AD)/2$. Докажите, что $MNPQ$ – прямоугольник и что его площадь равна площади четырехугольника $ABCD$.

1434. Известно, что Земля – плоская. Верно ли, что любой выпуклый многогранник можно осветить точечным фонарем из некоторой точки пространства так, что его тень будет многоугольником, хотя бы один угол которого – острый?

1435. Докажите, что в любой многочлен $P(x)$ степени больше 1 можно подставить многочлен $Q(x)$ такой, что $P(Q(x))$ разлагается на два множителя (все многочлены с целыми коэффициентами).

1436. Какой наибольший объем имеет тетраэдр, у которого:

- а) 4 ребра; б) 5 ребер;
- в) все 6 ребер не превосходят 1?

1437*. Докажите, что если последовательность удовлетворяет следующим условиям:

a_1, a_2, a_3 – целые неотрицательные числа,

$a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ (при $n = 1, 2, \dots$),

то при всех натуральных n и простых p число $a_{n+3p+1} - a_{n+p+1} - a_{n+1}$ делится на p .

1438. Докажите, что для любого n существует $P(n)$ такое, что натуральное число, у которого ровно n различных простых множителей и все они больше P , не может быть совершенным. (Число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа.)

1439. В треугольнике стороны равны a, b, c ; медианы, проведенные к этим сторонам, равны m_a, m_b, m_c . Докажите неравенства:

$$\text{а) } \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{б) } \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}.$$

1440*. Доска $m \times n$ клеток покрыта одинаковыми плитками размерами $1 \times k$ клеток. Разрешается вынуть любой квадрат $k \times k$ клеток (если он состоит из плиток $1 \times k$) и повернуть на 90 градусов. Докажите, что такими операциями можно добиться того, что все плитки будут лежать в одном направлении.

1441. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относи-

тельно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

1442. Две окружности пересекаются в точках A и B . В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N . Прямые BM и BN пересекают окружности еще раз в точках P и Q (P – на прямой BM , Q – на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.

1443. Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, причем $0 \leq x_1 \leq 1$.

а) Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая в том и только в том случае, если x_1 рационально.

б*) Сколько существует значений x_1 , для которых эта последовательность – периодическая с периодом T (для каждого $T = 2, 3, \dots$)?

1444. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $P^n(x)$, $n > 1$, – положительные?

1445. Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулем, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

1446. Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A , параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются (по внутренним точкам).

1447. В квадрате клетчатой бумаги 10×10 нужно расставить один корабль 1×4 , два 1×3 , три 1×2 и четыре 1×1 . Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что:

а) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удастся довести до конца, даже если в каждый момент заботиться только об очередном корабле, не думая о будущих;

б*) если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).

1448. Рассматривается произвольный многоугольник (не обязательно выпуклый).

а) Всегда ли найдется хорда многоугольника, которая делит его на равновеликие части?

б) Докажите, что любой многоугольник можно разделить некоторой хордой на части, площадь каждой из которых не меньше $1/3$ площади многоугольника.

(Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику.)

1449. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD – в точке Q . Докажите, что если каждая из трех пар биссектрис: внешних углов четырехугольника при вершинах A и C , внешних углов при вершинах B и D , а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой.

1450. Докажите, что для любого $k > 1$ найдется степень числа 2 такая, что среди k последних ее цифр не менее половины составляют девятки. (Например, $2^{12} = 4096$, $2^{53} = \dots 992$.)

782. (4–83) Разложите число 30030 на простые множители.

783. (4–83) а) $n = 4$; б) для любого n .

784. (4–83) $T(\varphi) = (1/\pi) \arccos(\operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \alpha)$.

785. (4–83) б) Да; в) нет.

786. (5–83) Первое число равно $n^{k-1} - n + 1$.

787. (5–83) $3 : 4 : 5$.

788. (5–83) $m = (a + b)/2$.

789. (5–83) а) Нет; б) раскрасьте точки на окружности в два цвета через одну.

790. (5–83) а) Нет. б) Докажите, что F сохраняет решетку правильных треугольников.

792. (6–83) а) 1, 2; б) 1, 1 и 2, 3; в) $n = 4$.

795. (6–83) в), г) Дело сводится к оценке суммы $1 + 1/2 + \dots + 1/n$.

796. (7–83) 135° . Рассмотрите поворот на 90° с центром B .

797. (7–83) Нет.

798. (7–83) Можно упрощать систему хорд так, что число пересечений красных хорд с красными уменьшается, а с синими – не увеличивается.

799. (7–83) См. статью С.Валлиндера «Постоянная становится переменной».

800. (6–84) См. статью А.Гончарова «Решетки и зоны Бриллюэна» (или 1–95).

801. (8–83) Рассмотрите целые точки в области $x > 1$, $y > 1$, $x^y < n$.

802. (8–83) Углы P и Q равны β . Можно использовать комплексные числа (или преобразования подобия).

803. (8–83) $x = y$ – это 1, $1/2$ или 2.

804. (8–83) Если D – точка, симметричная C относительно O , то тетраэдр $ABCD$ – «равногранный».

805. (8–83) б) Можно использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

806. (9–83) б) Рассмотрите функцию $g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k x^{p+k}}{p+k}$ и ее производную.

807. (9–83) Проследите, как меняется сумма при сдвиге точки M .

808. (9–83) Нет. Сравните с задачей 750.

809. (9–83) $1 - 1/n!$.

810. (9–83) Рассмотрите наибольшую диагональ и серединный перпендикуляр к ней.

811. (10–83) $(m_a - R)a \leq 2S_{OBC}$.

812. (10–83) Эта сумма не больше $2(1 - 1/\sqrt{n+1})$.

813. (10–83) Проведите стороны и средние линии $\triangle ABC$ и сравните полученные сегменты.

814. (10–83) Одно из решений в) основано на том, что $8n^2 + 1$ при $n = (k^2 + k)/2$ – квадрат.

815. (10–83) Если на окружности расположены n красных и n синих точек, то их можно соединить n красно-синими непересекающимися хордами.

816. (11–83) Если $S(x)$ – сумма цифр числа x , то $2S(x) - S(2x)$ в 9 раз больше числа цифр x , не меньших 5.

817. (11–83) Удобно использовать векторы или взять точку L на BC такую, что $\angle CAL = \angle KBA$.

818. (7–85) См. статью М.Концевича «Равномерные расположения».

819. (11–83) Способы определяются нумерацией (в произвольном порядке) городов: дорога идет из i в j , если $i < j$.

820. (11–83) Начиная с каждой стороны, можно выстроить дорожки из параллелограммов, идущие к противоположным сторонам.

821. (12–83) $x = -1/\left(1 + \sqrt[3]{2}\right)$.

822. (12–83) Можно доказать это по индукции.

824. (12–83) а) Да; б) нет.

825. (12–83) Отрезки длины d_i и d_j обслуживают интервал длин размером $d_i + d_j$.

826. (1–84) а) Нет; б) да. Можно выяснить, из какой тройки получается следующая.

827. (1–84) б) $1 + \sqrt{5}$.

828. (1–84) а), б) Можно. Расстановки можно поклеточно складывать (и вычитать).

829. (1–84) Можно доказать это индукцией.

830. (1–84) а) Используйте теорему Виета. б) 5.

831. (2–84) Используйте средние линии.

833. (2–84) $x_n = \operatorname{tg}(n \arctg 2)$.

834. (2–84) б) Рациональнее использовать треугольную сетку.

835. (2–84) Доказательство по индукции использует теорему Холла о различных представителях.

836. (3–84) Используйте гомотетию, переводящую одну окружность в другую.

837. (3–84) Можно использовать единственность представления целого z в виде $z = ax + by$, $0 \leq x < b-1$, если a и b – фиксированные взаимно простые числа, x и y – целые.

838. (3–84) а) Да. Можно рассмотреть лишь вершины и точки, делящие стороны на три части.

839. (3–84) Да. Удобно использовать троичную систему счисления.

840. (3–84) а) Можно использовать неравенство Коши–Буняковского. б) См. задачу 762.

841. (4–84) Это следует из теоремы Пифагора и равенства отрезков касательных.

842. (4–84) Примените утверждение а) к углам $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.

843. (4–84) Представим, что стороны треугольника равномерно сближаются (сохраняя направления), и нарисуем график движения.

844. (4–84) Можно доказывать это по индукции; коэффициенты a_i и b_i определяются последовательно (от «головы» или от «хвоста»).

845. (4–84) Для любого четного n .

846. (7–84) Достаточно использовать неравенство $AC + BD > AB + CD$ для (всевозможных) выпуклых четырехугольников с вершинами в вершинах n -угольника.

847. (5–84) а) Второй; б) при четном n – второй, при нечетном – первый.

848. (5–84) г) $2^n - 1$.

849. (5–84) Рассмотрите остатки при делении на 9.

850. (5–84) Биссектриса делится этим отрезком в отношении, которое легко выразить через стороны треугольника (можно использовать векторы или центры масс).

851. (6–84) PQ касается окружности с центром S и радиусом 1.

852. (6–84) Сумма трех дробей (по модулю) равна их произведению.

853. (6–84) Отрезок прямой.

854. (6–84) 11 монет по 10 коп. одна – 15 коп.

855. (6–84) в) Можно; г) нельзя (точная граница $\approx 0,896$).

856. (7–84) Нам известны средние линии треугольников, на которые четырехугольник разрезан диагоналями.

857. (7–84) Отмеченных больше (1019).

858. (7–84) а) Либо $\alpha = \pi/4$, либо $\sin \alpha = (\sqrt{2} - 1)/2$; б) нет.

859. (7–84) $a = 8$ (более общую задачу см. в статье Н. Васильева и А. Зелевинского «Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения», 1–82).

860. (7–84) Это – запись в векторной форме классических фактов «геометрии треугольника».

861. (8–84) Рассмотрите дробные доли суммы первых k чисел ($k = 1, 2, \dots, n$).

862. (8–84) б) Октаэдр с вершинами в серединах ребер тетраэдра.

863. (8–84) а) Можно; б), в) нельзя. Рассмотрите «расстояния коня и короля» (наименьшее число переходов этих фигур) между клетками.

864. (8–84) б) Нельзя; в) для любых (на 6 или 8 треугольников).

865. (8–84) в) Можно доказывать это утверждение индукцией по n , рассмотрев случаи $a_n \geq 2^n$ и $a_n < 2^n$.

866. (9–84) Это расстояние от центральной до угловой клетки.

867. (9–84) Рассмотрим k самых высоких мальчиков и соответствующих им девочек.

868. (9–84) Это – плоскость, касающаяся описанной сферы в вершине тетраэдра.

869. (9–84) От пары $(m, m + 1)$ можно перейти к паре $(4m(m + 1), 4m(m + 1) + 1)$.

870. (9–84) Рассмотрите сумму попарных расстояний между пианистами.

871. (10–84) Это случится уже на 4-м шаге.

872. (10–84) $r_1 r_2 r_3 / (r_1 r_3 + r_1 r_2 - r_2 r_3)$.

873. (10–84) Да. Проследите за значением при $x = -1$.

874. (10–84) Только при $m = n = 0$.

875. (10–84) б) Это можно доказать индукцией, рассмотрев наибольшее число (если числа не равны между собой, оно равно сумме соседних).

876. (11–84) Используйте равенство отрезков касательных.

877. (11–84) Нарисуйте 100 несовпадающих квадратов 2×2 .

878. (11–84) Рассмотрите развертку пирамиды на плоскости.

879. (12–84) См. статью Л. Курляндчика и С. Фомина «Теорема Виета и вспомогательный многочлен».

880. (11–84) Инвариантом служит, например, последняя цифра числа $2x + 4y + 6z + 8u + 10v + 12w$, где (x, y, z, u, v, w) – очередная шестерка.

881. (12–84) Используйте неравенство треугольника.

882. (12–84) Это – квадрат $a^2 + b^2 + c^2$.

883. (12–84) а) 4; б) 8.

884. (1–85) Для прямоугольника площадью $1/n^2$ сумма двух соседних сторон не меньше $2/n$.

885. (1–85) а) Рассмотрите разбиения, в которых одно из слагаемых отмечено. б) Разброс любого разбиения числа n не больше $\sqrt{2n}$.

886. (2–85) а), в), г) Можно; б) нельзя.

887. (2–85) Подсчитывая вписанные углы, докажите, что $ABCD$ – параллелограмм (D – точка пересечения AM со второй окружностью).

888. (2–85) Существуют целые x, y, z, t такие, что $a = xy$, $b = zt$, $c = xz$, $d = yt$.

889. (2–85) Да; $AB = \sqrt[4]{2}$, C – середина AB .

890. (2–85) Да. Сравните с задачей 494.

891. (3–85) В описанном четырехугольнике равны суммы противоположных сторон; продолжив его стороны, получаем треугольники с равными периметрами.

892. (3–85) б) Рассмотрите остатки при делении на 3.

893. (3–85) а) Да; б) нет (четность!).

894. (3–85) б) Можно использовать индукцию.

895. (3–85) Если через прямую AB проведены две плоскости, касающиеся сферы в точках M и N , то $S_{ABM} = S_{ABN}$.

896. (4–85) Можно использовать зеркальное подобие, переводящее одну полуокружность в другую (A в C , B в D).

897. (4–85) (1, 18).

898. (4–85) $a + b = 2^{m-1}$.

899. (4–85) Можно свести дело к случаю, когда суммы равны нулю, и приближать числа к целым так, чтобы количество целых с каждым шагом возрастало.

900. (4–85) в) $2n - 4$. Оцените число ребер через число граней отдельно в верхней и нижней части (используйте формулу Эйлера для плоской карты).

901. (5–85) Опустите перпендикуляры из O на AC и BC .

902. (5–85) Произведение разностей входит в одну из прогрессий.

903. (5–85) а) Да; б) нет. Рассмотрите момент, когда сечение проходит через вершину.

904. (5–85) а) $D(A) < A$ при $A > 20$; б) 19.

905. (6–85) б), в) Уравнение можно переписать в виде $z^2 - 5y^2 = -4$, где $z = 5x + 1$. См. статью Н.Васильева и В.Гутенмахера «Пары чисел и действия с ними», 1–85. а), г) Уравнения можно представить в виде $fg = 8$, $fg = 4x^n$, где f и g – линейные функции.

906. (6–85) а) Число решений равно числу делителей a^2 ; б) 9.

907. (6–85) Возьмите на AB точку D такую, что $AD = b$.

909. (6–85) а), б) Пример строится по индукции; в) нет, рассмотрите сумму обратных величин; г), д) да.

910. (6–85) Представьте, что шестиугольник – проекция куба.

911. (7–85) Диагонали четырехугольника $KLMN$ – средние линии треугольников ABF и CDE .

912. (7–85) б) Можно доказать это сначала для ax^n , действуя по индукции.

913. (7–85) Рассмотрите отношение расстояний точек прямой PC и медианы до AC и BC .

914. (7–85) Не может. Рассмотрите остаток от деления на 3 двух чисел тройки (это – инвариант).

915. (7–85) См. статью Л.Курляндчика и А.Файбусовича «История одного неравенства», 4–91. Сравните с задачами 182, 749.

916. (8–85) Разрежьте шестиугольник на три параллелограмма.

917. (8–85) а) 1000; б) две.

918. (8–85) Дело сводится (для отрезков касательных) к уравнению $x + y + z = xyz$.

919. (8–85) Рассмотрите интегралы как площади под графиком одной функции.

920. (8–85) Только $(1, 1, 1)$ и $(1, 2, 3)$. См. статью М.Крейна «Диофантово уравнение Маркова», 4–85, или ее продолжение – статью Н.Васильева и В.Сендерова «Про угол $\pi/7$ и $\sqrt{7}$ », 2–96.

921. (9–85) Отразите D относительно серединного перпендикуляра к отрезку CD .

924. (9–85) б) $n(n^2 - 1)/24$ при нечетном n и $n(n^2 - 4)/24$ при четном n .

925. (9–85) См. статью А.Тоома «Кляксы на плоскости».

926. (10–85) Рассмотрите векторы (x, y) и (u, v) .

927. (10–85) а) Нет (рассмотрите сумму длин отрезков); б) да.

928. (10–85) $1/2$. Можно установить соответствие между выгодными и невыгодными размещениями.

929. (10–85) а) Рассмотрите остатки n^4 при делении на 16.

930. (10–85) Рассмотрите наибольшее из множеств $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$, $k \geq 330$, и разности $a_j - a_i$. Сравните с задачей 540.

932. (11–85) Барон прав. Рассмотрите проекции звеньев ломаной на стороны квадрата и оцените их длины.

934. (11–85) а) Рассмотрите точку, из которой выходит максимум отрезков. б) Доказательство можно провести индукцией по n , используя задачу а) и рассмотрев два случая: общее число отрезков, выходящих из вершин треугольника (не считая его сторон), не больше $3n - 2$ или не меньше $3n - 1$.

935. (11–85) Если выпуклый многоугольник не содержит точку O , то найдется такая его сторона AB , что точка O и многоугольник лежат по разные стороны от AB .

936. (12–85) Сначала разобьем $2n + 2$ камня на пары.

937. (12–85) а), б) Да. (Один из примеров: круг без двух сегментов.)

938. (12–85) б) Нет.

939. (12–85) а) Да (можно заполнить плоскость уголками и раскрасить их в 10 цветов подходящим образом). б) Оцените сумму количества строк и столбцов, где встречается цифра k (по всем k).

940. (12–85) Можно (хотя и не просто) доказать а) и б) индукцией по числу прямоугольников; рассмотрите вершину одного прямоугольника, ближайшую к другому, к которому мы проводим цепочку, и проведите через эту вершину прямую, разделяющую соседние прямоугольники.

941. (1–86) Хорда $A_j A_{2k-j-1}$ симметрична $A_j A_{2k-j+1}$ относительно OA_k .

942. (1–86) Из чисел a_k, b_k ровно одно больше n .

943. (1–86) Сравните со статьей Н.Васильева и В.Гутенмахера «Кривые дракона», 2–70.

944. (1–86) Нарисуйте полосу слева от каждого отрезка, ведущего из точки i в соседнюю точку j , $i < j$.

945. (1–86) Докажите сначала, что найдется n , для которого сумма n чисел подряд больше $n - 1/2$.

947. (2–86) б) 6; докажите сначала, что дробь $1/11$ нужно стереть.

948. (2–86) Рассмотрите 6 точек: вершины и середины сторон.

950. (2–86) При любом распределении найдется забор, который можно снести, поменяв участки двух коротышек.

951. (3–86) Оцените сумму углов шестиугольника.

952. (3–86) $2 + \sqrt{3}$.

953. (3–86) 10 точек.

954. (3–86) б) Рассмотрите также случай, когда на каждой грани тетраэдра лежит по две вершины параллелепипеда.

955. (3–86) $k^2 - k$ при $n = 2k$ и k^2 при $n = 2k + 1$.

956. (4–86) Центры двух окружностей, проходящих через A , и точки пересечений их с третьей окружностью – вершины параллелограмма.

957. (4–86) Это – частный случай общей (нерешенной) проблемы Д.Флейшмана: для какого наименьшего $N = N(m, d)$ из N наборов (x_1, \dots, x_d) , где $x_i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, можно выбрать m наборов, сумма которых (как векторов, x_i складываются по модулю m) равна $(0, 0, \dots, 0)$? Для $m = 4$ и, вообще, $m = 2^k$ можно доказать, что $N(d, m) = (m-1)2^d + 1$ (сравните с задачей 45).

958. (4–86) Можно вести индукцию по i_n , где $2^{k-1} \leq i_n < 2^k$, или индукцией по i_1 . Можно также рассмотреть множества, разрядов, в которых стоят единицы в двоичном разложении чисел i_s .

959. (4–86) Выберите из разбиений городов на $k-1$ групп то, для которого число рейсов внутри групп наименьшее.

960. (4–86) б) в) Дело сводится к уравнению Пелля $x^2 - 3y^2 = 1$ в целых числах; оно имеет серию решений (x_n, y_n) , где $(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$ (см. статью Н.Васильева и В.Гутенмахера «Сопряженные числа», 2–80).

961. (5–86) Сумма арктангенсов 1, 2 и 3 равна $\pi/2$.

962. (5–86) Воспользуйтесь тем, что $P(x) - P(y)$ делится на $x - y$.

963. (5–86) Множество точек X в трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$), для которых равны площади треугольников AXD и BXC , – отрезок, соединяющий середины оснований.

964. (5–86) Оцените долю чисел, в которых не встречается 1 (или 11, 111, ...) среди первых 10^k .

965. (5–86) Нужно последовательно вычислять для $n = 1, 3, \dots$ суммы произведений первых n чисел по k для всех $k \leq n$.

968. (6–86) а) Сопоставьте многоугольнику вектор, перпендикулярный его плоскости и равный по длине его площади; б) 4.

969. (6–86) Используйте равенства вида $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

970. (6–86) а) 2; б) 6.

971. (7–86) Подсчитайте среднее число выигрышей у команд, проигравших команде с максимальным числом очков.

972. (7–86) Заметьте, что $1/(x_n + 1) = 1/x_n - 1/x_{n+1}$.

973. (7–86) HE – биссектриса угла AHC .

974. (7–86) Подсчитайте продолжительность партии при условии, что время на каждый ход (кроме первого) не более 220 секунд, а на первый – 110 секунд.

975. (7–86) б) Подсчитайте число «запретных» полей, если фигуры ставятся по очереди.

976. (8–86) Треугольники AEF и APQ подобны (проведите окружность $ABEQ$).

977. (8–86) а) Нельзя (подставьте -1); б) можно; в) нельзя; г) нельзя (возьмите $x = \sqrt{2}$).

978. (8–86) Нельзя. Каждый треугольник содержит центр квадрата.

979. (8–86) а) $n - k$ нечетно; б) все a_i равны $1/2$ для $1 \leq i \leq k$.

980. (8–86) Разбейте многоугольник (многогранник) на треугольники (тетраэдры) с общей вершиной.

981. (9–86) Даже 128 и 1024 делителей! Заметим, что это число равно $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (a^6 - 1) / 999999$, где $a = 10^{331}$.

982. (9–86) Проведите через центры квадратов прямые, параллельные соответствующим сторонам треугольника.

983. (9–86) Одиннадцатого можно вставить в цикл из 10.

984. (9–86) Существует поворот на 90° , переводящий прямую DC в AD , AB – в BC , а точки P и Q – в диаметрально противоположные точки тех же окружностей.

985. (9–86) Двумя способами, если углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ острые, $180^\circ \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 360^\circ$, $0 \leq \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 \leq 180^\circ$, $0 \leq \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 \leq 180^\circ$, $0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \leq 180^\circ$.

986. (10–86) Положите $a = x^{10}$, $b = p^{15}$ и рассмотрите функцию $f(x) = 2x^5 + 3p^5 - 5x^2p^3$.

987. (10–86) Рассмотрите циклы, в которых соседи встречались попеременно в первом и втором турах.

988. (10–86) Каждый вектор вместе с k следующими за ним (против часовой стрелки) лежат в одной полуплоскости.

989. (10–86) б) 4, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 24 и 42. в) Для любого

с во множестве чисел, меньших с и представимых в виде суммы n дробей вида $1/k$, имеется наибольшее.

990. (10–86) а) 1; б) 19; в) 31.

991. (11–86) Докажите, что $\angle OPQ = \angle OQP$, где O – центр описанной окружности $\triangle MNH$, P и Q – середины сторон AC и BC .

992. (11–86) Пусть у выпускника A нет такого B , который имеет с ним двух общих друзей; оцените количество тех, кто дружит с друзьями A , но не с самим A .

993. (11–86) а) 18, 19, ..., 28.

994. (11–86) $2/3$.

995. (11–86) а) $y = \lambda x$, где $\lambda = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

996. (12–86) Попробуйте параллельно сдвигать один из квадратов.

997. (12–86) Рассмотрите степени 3 в знаменателях дробей.

998. (12–86) Воспользуйтесь несколько раз тем, что два треугольника с общим основанием, лежащим вне сферы, и вершинами в точках касания равны (из соображений симметрии).

999. (12–86) а) Набор a_1, a_2, \dots, a_n можно расположить в порядке возрастания. б) Можно использовать неравенство Коши–Буняковского для скалярного произведения наборов $\sqrt{a_i}$ и $i/\sqrt{a_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$. в) Рассмотрите набор $a_i = i$.

1000. (12–86) Полезно рассмотреть точку, симметричную B относительно прямой KM .

1001. (1–87) 500500. Представьте, что первоначально все пары камней связаны нитями.

1002. (2–87) См. статью М.Гервера «Трехзначные числа и орграфы».

1003. (1–87) Они равны $|AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos \angle A \cdot \cos \angle B \times \cos \angle C|$.

1004. (1–87) Точка B или симметричная ей относительно прямой, проходящей через A , лежат на одной окружности с точками A , C , M .

1005. (1–87) а) 1 при $n = 3$, $(n - 1)^2 - 1$ при $n \geq 4$; б) $n - 2$.

1006. (2–87) а) Нет; б) четырехугольник и два треугольника; 3 или $\sqrt{5} - 2$.

1007. (2–87) Приведите данное равенство к виду $(\sqrt{ab_1} - \sqrt{a_1b})^2 + \dots = 0$.

1008. (2–87) Да.

1009. (2–87) Рассмотрите поворот, переводящий KC в CL .

1011. (3–87) Рассмотрите квадраты с общим углом и сторонами a_1, a_2, \dots, a_n .

1012. (3–87) б) Рассмотрите круги наименьшего радиуса.

1014. (3–87) В качестве b можно взять произведение всех разностей чисел a_i .

1015. (4–87) Да.

1016. (4–87) Разрежьте многоугольник на треугольники с центром O .

1017. (4–87) Да. Найдите функцию от 5 чисел, которая уменьшается при этих операциях.

1019. (4–87) Индукция по числу точек; удобно выбрать точку, лежащую на прямой, где их нечетное число, если она существует.

1020. (4–87) Рассмотрите множество «полюсов», соответствующих «экваторам», пересекающим данную линию. Для оценки площади разбейте кривую на мелкие отрезки.

1021. (5–87) 5 (две ночевки внизу, две – на скале).

1022. (5–87) в) При четных $n \geq 4$.

1023. (5–87) Нет.

1024. (5–87) Рассмотрите сумму трех векторов с длинами, равными сторонам одного треугольника, и направленных по сторонам второго.

1025. (5–87) Здесь много пар равных касательных.

1026. (6–87) Рассмотрите многоугольник с вершинами в концах дуг. В случае б) $(1 - 2/m)3\pi/2$.

1027. (6–87) Здесь помогает симметрия: $(1987 - 1)(1987 - 3) \dots (1987 - 1985) \equiv -1985!! \pmod{1987}$.

1028. (6–87) Отразите точки D и E относительно данных прямых.

1029. (6–87) Докажите, что разность прогрессии (если ее первый член 1) и знаменатель ее части – геометрической прогрессии – есть рациональные числа. Запишите их как несократимые дроби.

1030. (6–87) Рассмотрите объем r -окрестности многогранника как функцию от r (это – многочлен).

1031. (7–87) Рассмотрите точку, симметричную B относительно l .

1032. (7–87) Рассмотрите произведение

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

1033. (7–87) Проведите диаметры, параллельные сторонам квадрата.

1034. (7–87) Начинаящий. В общем случае шоколадки $m \times n$ (когда не работает «симметричная» стратегия, например, при нечетных $m > n > 1$) общий ответ не известен.

1035. (7–87) Можно свести дело к случаю, когда очередная точка ставится в середину одного из отрезков между предыдущими.

1036. (8–87) Да (и даже двух разных типов).

1037. (8–87) (2; 5). Рассмотрите функцию $\ln x/x$.

1038. (8–87) б), в) 6×4 и 3×2 , а также $6k \times 2n$ при $k \geq 1$, $n \geq 3$.

1039. (8–87) б) Можно использовать лемму: произведение двух противоположных ребер тетраэдра не больше суммы двух других таких произведений.

1040. (8–87) Рассмотрите наибольшую серию $1, 2, \dots, k-1$ из одной группы; если k – из второй группы, то для любого a из третьей число $a-1$ (при условии, что нужной тройки нет) принадлежит первой группе.

1041. (9–87) Легко построить биссектрису угла.

1042. (9–87) Иначе строится возрастающая цепочка команд.

1043. (9–87) Нет. Докажите, что n , $n+1937$ и $n-150$ должны принадлежать одному подмножеству.

1044. (9–87) Используйте выражение для тангенса разности.

1045. (9–87) Разбейте квадрат на четыре равных, каждый из тех – еще на четыре и так далее.

1046. (10–87) Окружность, симметричная описанной относительно BC , содержит ее центр и точку пересечения высот треугольника ABC .

1048. (10–87) Выигрывает: а) второй; б) второй – при четном mn и первый – при нечетном. Идея: разбиение клеток на пары.

1049. (10–87) а) $k \geq \sqrt{2}$; б) $\sqrt{89/55} \leq k < \sqrt{34/21}$; в) $k = \sqrt{(1+\sqrt{5})/2}$. (Тут явно выступают числа Фибоначчи и золотое сечение; см. также задачу 1053.)

1050. (10–87) Можно действовать методом «улучшения» (раздвигая отдельные переменные или пары). Наименьшее $S_k = 2^{k-2}$ при $k \geq 3$ достигается в точках $-\cos \frac{\pi m}{k-1}$, $m = 0, 1, \dots, k-1$ (см. задачу 859).

1051. (11–87) а), б) Нет. Рассмотрите шахматную или «чересполосную» раскраску.

1052. (11–87) Достаточно проследить за соседними четырехугольниками (и их длинами сторон).

1053. (11–87) Помогает простая оценка отношения r_n двух соседних чисел Фибоначчи, т.е. чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., где каждое равно сумме двух предыдущих ($5/3 < r_n < 3/2$ при $n > 2$), или формула Бинэ для n -го числа Фибоначчи:

$$u_n = (\tau^{n+1} - (-\tau)^{-n-1}) / \sqrt{5}, \text{ где } \tau = (1 + \sqrt{5})/2.$$

1054. (11–87) Проще всего использовать инверсию. Но можно рассматривать сечения и использовать тот факт, что множество точек, касательные из которых к двум сферам равны, есть плоскость.

1055. (11–87) Достаточно заметить, что из дуг, определяемых тремя точками, хотя бы одна не больше 120° , и оценить число ребер в графе, вершины которого суть данные точки, а ребра соединяют пары, отстоящие не более чем на 120° .

1056. (12–87) Можно рассмотреть квадраты 2×2 , идущие из угла в угол таблицы.

1057. (12–87) а), б) Выигрывает начинающий. В п. а) можно начать с 6; в б) можно доказать от противного, т.е. «сменой стратегии» партнера.

1058. (12–87) Предположив противное, надо выбрать крайние векторы с неотрицательными координатами.

1060. (12–87) Если это не так, то хотя бы одна из двух прямых, содержащих пару звеньев, должна пересекать звено, а не его продолжение. Теперь «шевелением» (параллельным сдвигом) прямых нужно проверить четность общего числа таких пересечений.

1061. (1–88) Пользуясь тем, что на графе нет перешейков, можно делать это постепенно, шаг за шагом увеличивая «ориентированное» множество. (Общее утверждение называется в теории графов теоремой Роббинса.)

1062. (1–88) Можно использовать векторы или понятие «центр масс».

1063. (1–88) а), б) $18 \cdot 19 = 342$; в) $18 \cdot 19^m$, где $m = n/2 - 1$ при четном n и $m = (n-3)/2$ при нечетном $n > 1$.

1064. (1–88) См. статью Д. Фукса «Самопересечения замкнутой ломаной». а) $n(n-3)/2$; б) $n(n-4)/2 + 1$. Можно показать, что существует не более двух ломаных, которые пересекают все несмежные с ними звенья.

1066. (2–88) Если нет, то нашлись бы три точки с попарными расстояниями 1.

- 1067. (2–88)** Найдите максимум $t(1-t)^2$ при $0 \leq t \leq 1$.
- 1068. (2–88)** Задача имеет, вообще говоря, 4 решения.
- 1069. (2–88)** Поворот по циклу можно получить как композицию двух зеркальных симметрий.
- 1070. (3–88)** Полезно рассмотреть проекции тетраэдра вдоль ребер и средних линий.
- 1071. (4–88)** Первый (используя, если возможно, нечетные цифры).
- 1072. (3–88)** Если $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ и $a+b+c = 0$, то $f(x) + f(-x) = 2f(0)$.
- 1073. (3–88)** Сложим шестиугольник гармошкой (в угол 60°).
- 1074. (3–88)** Расстановка определяется в любой момент положениями двух (верхних) карточек.
- 1075. (3–88)** 96433469.
- 1076. (4–88)** Треугольники ACL и ANB подобны.
- 1077. (4–88)** а) Подсчитайте двумя способами число пар «перестановка, ее неподвижная точка».
- 1078. (4–88)** Допустим обратное, тогда $f(n+1987k) = f(n) + 1987k$; теперь рассмотрите остаток при делении $f(r)$, где $0 \leq r \leq 1986$ – произвольное целое число, на 1987.
- 1079. (4–88)** Да. Можно взять точки (k, k^2) , где $k = 1, 2, \dots, n$.
- 1080. (4–88)** Интересен пример Эйлера ($q = 41$). Рассмотрите наименьшее целое y такое, что $y^2 + y + q$ составное, и его наименьший простой делитель.
- 1082. (5–88)** Запишите теоремы косинусов для четырех треугольников с вершиной O .
- 1084. (5–88)** Это – точка, симметричная B относительно середины отрезка между центрами окружностей.
- 1085. (5–88)** а) Нет; б) нет; в) да.
- 1086. (6–88)** $[\log_2 n] + e(n)$, где $e(n)$ – число единиц в двоичной записи n ; удобно решать задачу в «обратном порядке» – с конца.
- 1087. (6–88)** Точка M – центр вписанной окружности треугольника, в котором AB, BC, CA – средние линии.
- 1088. (6–88)** Это – квадрат числа $(p+q)(q+r)(r+p)$.
- 1089. (6–88)** Оцените периметр четырехугольника $KLMN$ удвоенной суммой радиусов окружностей.
- 1090. (6–88)** Используйте неравенство треугольника и теорему косинусов.

1091. (7–88) а) 549; б) нет.

1092. (7–88) $2^{10} + 1 = 1025$; можно доказать по индукции, что при n перегибах возникает не больше $2^n + 1$ слоев.

1093. (7–88) а) $n - k + 1$; проследите за сериями вида $21...1 * (* - \text{это } 0 \text{ или } 2)$.

1094. (7–88) а) Разность можно превратить в $(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$; б) нет.

1095. (7–88) Проведите окружность через A, M, N и в ней – хорду через O ; ее длина не зависит от α .

1096. (8–88) Оцените площадь выпуклого $2k$ -угольника с вершинами в концах этих хорд и диаметра..

1097. (8–88) Расположите треугольник так, чтобы вершина лежала в начале координат.

1098. (8–88) Первый – при n нечетном или кратном 4, второй – при $n = 4k + 2$. Используются соображения симметрии, индукция, раскраска вершин в два (чередующихся) цвета.

1099. (8–88) Эта задача относится к теории Рамсея – см. статью М.Волкова и Н.Силкина «Кого послать на Марс?»

1100. (8–88) Удобно (проведя от левого и правого концов каждого бревна два луча под углами 135° и 45° к берегу) ввести некоторое множество запрещаемых точек – «тень бревна» так чтобы каждое бревно мешало лишь тем, кто попадает в его тень, и тени образовывали упорядоченное по включению семейство.

1101. (9–88) Возможны три случая: 1) $AD = AE$, $\angle A = 2 \arctg(1/4)$; 2) $AE = DE$, $\angle A = 36^\circ$; 3) $AD = DE$, $\angle A = 20^\circ$.

1102. (9–88) Строить примеры (начиная с $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$) можно «наращиванием» по индукции.

1103. (9–88) Удобно использовать сетку из квадратов 2×2 .

1104. (9–88) Аналогичное равенство выполняется и для проекции точки D на плоскость ABC . Любопытно, что произведения пар противоположных ребер пропорциональны сторонам треугольника, вершины которого – образы точек A, B, C при инверсии с центром D .

1105. (9–88) а), б) Правильный тетраэдр.

1107. (10–88) Можно свести к цепочке оценок функций от одной переменной.

1108. (10–88) $[3n/2] - 4$; можно доказать, что одна из диагоналей не пересекает остальные, и действовать по индукции.

1109. (10–88) а) Нельзя; б) можно.

1110. (11/12–88) Оцените количество пар (x, y) взаимно простых натуральных чисел $x < y \leq n$ и воспользуйтесь

оценками

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

1111. (11/12-88) Треугольники APM и CPN подобны.

1112. (11/12-88) а) Можно; б) нельзя.

1113. (11/12-88) 21.

1114. (11/12-88) Оцените объем тетраэдра и его полную поверхность через a , b и расстояние между содержащими их прямыми.

1115. (11/12-88) б) Индукция по n ; рассмотрите случаи $m = n$, $m = n + 1$, $n + 1 < m < 2n$ (при четном и нечетном m), $m \geq 2n$.

1116. (1-89) а) 74; б) $2S + 2$.

1117. (1-89) Помогают перестройки, основанные на симметриях.

1118. (1-89) б) 16.

1119. (1-89) $k = 3$ и $k = 4$.

1120. (1-89) Из равенства $\text{НОД}(a_m, a_k) = \text{НОД}(a_{m-k}, a_k)$ следует, что $\text{НОД}(a_m, a_k) = a_d$, где $d = \text{НОД}(m, k)$ для любых $m > k \geq 1$ (как в алгоритме Евклида).

1121. (2-89) Можно подсчитать (для каждого из расположений) углы или рассмотреть композицию симметрий относительно прямых AB и BC – поворот на $2\angle B$ (вокруг B), переводящую прямую AK в KC .

1122. (2-89) $x_i = 0$, $1/3$ или $-1/3$ при всех i . (Выберем из x_i наибольшее и докажем, что все x_i равны.)

1123. (2-89) Да; можно заполнять по индукции квадраты $2^n \times 2^n$.

1124. (2-89) б) 1:2.

1125. (3-89) а) Как можно доказать по индукции, для начального участка слова верно равенство $W_{k+1} = W_k \circ W_k \circ W_{k-1}$ (знак \circ показывает, что слова записаны одно за другим). б) 2811. в) Рассмотрите слово как ломаную, где A – шаг вверх, B – шаг вправо, и оцените ее средний наклон. (Сравните с задачей 818.)

1126. (3-89) Четырехугольники $AKMD$ и $BKMC$ – вписанные.

1127. (3-89) а) Да; б) да; в) нет. Вообще, 1 получается из a , если и только если a – корень многочлена с целыми коэффициентами, у которого a^2 – не корень.

1128. (3-89) Рассмотрите момент, предшествующий первому возвращению одной из фишек.

1129. (3–89) Лес можно строить по индукции так, чтобы отношение «елки/березы» увеличивалось.

1130. (3–89) Доказательство удобно проделать для «симметризованного» многоугольника.

1131. (4–89) При четных n . Удобно рассмотреть граф с ребрами двух цветов (0 и 1), у которого вершины A_i ($i = 1, 2, \dots, 2n + 1$).

1132. (4–89) 92; рассмотрите двоичную запись числа m , тогда $f(m)$ – ее «обращение».

1133. (4–89) Воспользуйтесь теоремой Виета (см. указание к задаче 879) для многочлена

$$(x-1)(x-2)\dots(x-70)\left(\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{4}{5}\right).$$

1134. (4–89) $AK = AL = AD$.

1135. (4–89) Вместе с корнем $x = b$ уравнение $x^2 - kax + a^2 - k = 0$ имеет (также целый) корень $c = ka - b$. Остается изучить «спуск» $(a, b) \rightarrow (c, a)$, приводящий к «основной паре» $(0, n)$.

1136. (5–89) Разность левой и правой частей неравенства искусной группировкой слагаемых может быть приведена к виду $p(SA-1)^2 + q(AM-1)^2 + r(MS-1)^2$, где p, q, r – некоторые многочлены от A, M, S .

1137. (5–89) Треугольники MA_iA_{i+1} подобны.

1138. (5–89) Эти числа можно искать в виде pq, qr, rp , где p, q, r – линейные функции от n и x .

1139. (5–89) б) 12; оцените «кривизну» углов при вершине.

1140. (5–89) б) Да; в) нет.

1141. (6–89) Рассмотрите проекции диагоналей трапеции на основание или подсчитайте ее площадь.

1142. (6–89) $smn/4$.

1143. (6–89) Удобно изобразить массы гирек дугами окружностей соответствующих длин.

1144. (6–89) Первое (если хотя бы два из a_i – не нули).

1145. (6–89) Полезно рассмотреть центр J вписанной окружности отсекаемого треугольника PKL (треугольники JKL и ABC подобны). Можно вести подсчеты с тригонометрическими функциями.

1147. (7–89) Рассмотрите множество точек, до которых из данной точки можно дойти по четному числу красных отрезков.

1148. (7–89) Рассмотрите целые точки под графиком $y = \log_a x$.

1149. (7–89) Дуга окружности, проходящей через P и Q .

1150. (7–89) Можно применить неравенство Коши – Бу-
няковского с переменным $x_k = \sqrt{a_k(a_{k+1} + a_{k+2})}$ и $y_k =$
 $= \sqrt{a_k/(a_{k+1} + a_{k+2})}$.

1151. (8–89) б) $(n+3)!/3^n - 6$.

1152. (8–89) Произведение отрезков, на которые центр
вписанной окружности делит биссектрису AL (L – точка на
описанной окружности), равно $2rR$.

1153. (8–89) 56.

1154. (8–89) Удобно использовать отношения площадей
треугольников с вершинами в данных точках, основаниями
которых служат диагонали четырехугольника.

1155. (8–89) См. статью Г.Гальперина и А.Степина «Пери-
одические движения бильярдного шара», 3–89.

1156. (9–89) 11 (в общем случае получение не менее $2n -$
 $- k - 1$ очков гарантирует выход в число k сильнейших).

1157. (9–89) Рассмотрите наибольший ($\leq 180^\circ$) угол с
вершиной M , стороны которого идут в точки разного цвета.

1158. (9–89) 2; можно увидеть геометрическую интерпрета-
цию (приняв $x + y$, $y + z$, $z + x$ за стороны треугольника).

1159. (9–89) Постройте сетку прямоугольников $1 \times \sqrt{2}$.

1160. (9–89) а) Да; б) нет. Удобно построить таблицу, где
записываются положения каждого кенгуру после каждого прыж-
ка, и рассмотреть последние прыжки. (Предполагается, что
несколько кенгуру могут находиться в одной точке.)

1161. (10–89) Докажите, что 6 (или 7) центров шаров
должны размещаться в пределах правильного шестиугольника
со стороной 1, а значит – в его вершинах или центре.

1162. (10–89) Семь пар решений: (7; 5), (7; 6), (7; –11),
(1; –3), (1; –1), (1; 4), (–5; 2). Удобно ввести переменные $s =$
 $= x + y$, $t = xy$.

1163. (10–89) Функция от t – разность пройденных (к
моменту t) длин минус расстояние между черепахами (в момент
 t) – не убывающая. Можно доказать это, аппроксимируя пути
ломаными.

1164. (10–89) Воспользуйтесь формулой для суммы $S(n)$
делителей числа n и оцените $S(n)/n$, выделив члены, соответ-
ствующие сомножителям 3, 5, 7.

1166. (11–89) Можно считать, что $p \geq q \geq 0$, а $r \leq 0$, и
использовать неравенство $c^2 \geq (a - b)^2$.

1167. (11–89) 2^{n-1} .

1168. (11–89) Можно последовательно стирать города, в которые ведут не более 2 дорог. Аналогично можно доказать существование цикла длины не больше

$$2 \left[\log_d \frac{n(d-1)+2}{d+1} + 1 \right]$$

для случая n городов и m дорог, $d = n/m$.

1169. (11–89) Пристройте к стороне AD снаружи треугольник, равный треугольнику BMC и полученный его переворачиванием (а не параллельным переносом).

1171. (12–89) Рассмотрите неравенства $1/h_{n-1} - 1/h_n > 1/(nh_n^2)$.

1172. (12–89) Рассмотрите поворот пространства $(x, y, z) \rightarrow (y, z, x)$ на 120° .

1173. (12–89) Это неравенство верно для любых трех треугольников с вершиной O и основаниями на сторонах данного. В условии задачи (когда проведены три отрезка) можно заменить 9 на 18.

1174. (12–89) Как можно догадаться и проверить по индукции, $1 + 4a_n a_{n+1} = (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)^2$.

1175. (12–89) При любом n .

1176. (1–90) Можно использовать векторы (и понятие косого произведения векторов). Заметьте, что \vec{LN} получается из \vec{DC} (а \vec{MK} – из \vec{AB}) поворотом на 90° .

1177. (1–90) Это следует из неравенства Бернулли $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$ при $\alpha > 1$, $x > -1$ и неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

1178. (1–90) б) Для равностороннего или равнобедренного прямоугольного треугольников.

1179. (1–90) Докажите по индукции, что: а) $2a_n = (n-1)$; б) $10a_n = (n-1)(2n+1)/(n+1)$; в) $10a_n = n(n-1)/(n+2)$.

1180. (1–90) Рассмотрите общую точку сфер, диаметрально противоположную B в одной сфере и D – в другой.

1181. (2–90) Раскрасьте доску (периодически) в 4 цвета.

1182. (2–90) Только при $n = 3$. Рассмотрите цикл $(A_1 \text{ перелетел в } A_2, A_2 \text{ – в } A_3, \dots)$ и в нем – наименьшее расстояние $A_i A_{i+1}$.

1183. (2–90) Оцените число подходов мальчиков к киоску и число пар.

1184. (2–90) Можно разбить грани 8-гранника на пары равных (симметричных) треугольников, одна из вершин каждо-

го из которых – точка касания сферы, и сравнить суммы углов вокруг точек касания. Можно также использовать тот факт, что в выпуклый четырехгранный угол можно вписать шар тогда и только тогда, когда суммы двух пар противоположных плоских углов равны.

- 1185. (2–90)** а) $x_1 = (\sqrt{5} - 1)/2$; $x_2 = (3 - \sqrt{5})/2$; $x_3 = x_1$;
 б) $x_1 = x_4 = \sqrt{3}/3$; $x_2 = x_3 = \sqrt{3}/6$.

В общем случае ответом служит набор отрезков, на которые лучи, делящие на равные части угол $\alpha = \pi/(n+2)$ при вершине равнобедренного треугольника с боковой стороной 1, разбивают основание треугольника.

1186. (3–90) Картонный четырехугольник – обязательно прямоугольник!

1187. (3–90) Одна из расстановок: $m-1, 2, m-3, 4, m-5, 6, \dots, 1, m-2$.

1188. (3–90) Сопоставьте каждому прямоугольнику $a \times b$ точку (a, b) на плоскости Oxy . Эти точки включаются в 50 цепочек (идущих вправо или вверх).

1189. (3–90) Полезно раскрасить области в черный и белый цвета (так, что соседние имеют разные цвета). Годится набор чисел: число углов со знаком «+» в черной и знаком «-» в белой области.

1190. (3–90) а) Вычеркните n строк с наибольшим числом звездочек и оцените число оставшихся. Общая задача: каково наибольшее число $k = k(m, n, p, q)$, для которого k звездочек, расставленных в таблице $m \times n$, наверняка убираются вычеркиванием p столбцов и q строк, это *проблема Циранкевича*.

1191. (4–90) Последовательность должна быть периодической ($A_n = A_{n+t}$), причем $\vec{A_1 A_2} + \vec{A_2 A_3} + \dots + \vec{A_{t-1} A_t} = 0$, если t четно.

1192. (4–90) б), г) Нет.

1193. (4–90) Здесь удобно рассмотреть тройки как векторы в пространстве.

1194. (4–90) б) Только для точек на осях симметрии прямоугольника. Коэффициент $3/8$ можно заменить на $\sqrt{2} - 1$.

1195. (4–90) Докажите неравенство $|(x_{n+1} - x_n) - (x_{k+1} - x_k)| < 2/(n+k+1)$ и при фиксированном k устремите n к бесконечности.

1196. (5–90) Проследите за суммой квадратов всех чисел набора.

1197. (5–90) Эти равенства эквивалентны существованию «вневписанной окружности» четырехугольника. Используйте тот факт, что расстояние от вершины A треугольника ABC до точек касания вневписанной окружности (стороны BC) с прямыми AB и AC равно полупериметру.

1198. (5–90) 46; слово можно привести к каноническому виду $1...10...010...0$.

1199. (5–90) Сравните знаки $f(t)$ и $f(-t)$, где t^2 – корень первого уравнения, $f(x) = 0$ – второе уравнение (4-й степени).

1200. (5–90) а) $k < 10$, $k \neq 3$, $k \neq 7$; б) $k < 100$ и $k + 1$ не делится на 8; в) $k < n$ такое, что в несократимом представлении дроби $(k + 1)/n$ числитель нечетен.

1201. (6–90) A – от 0 до 599; B – от 0 до 899; C – от 100 до 999.

1202. (6–90) Рассмотрите поворот квадрата, при котором BA переходит в AD .

1203. (6–90) а), б) Можно.

1204. (6–90) В случаях а), б) процесс периодический; в общем случае и, в частности, для в) – как правило, нет (для начальных условий общего положения), но возможен цикл периода 5, и к нему приближаются другие траектории процесса.

1205. (6–90) Достаточное количество цветов: а) 2; б) и в) 4.

1206. (7–90) Нужно заметить, что $\angle CAE + \angle CBF = 45^\circ$.

1207. (7–90) Неравенство $(t + 1/t)^m - t^m \geq 2^m - 2$ можно доказать по индукции, используя известное неравенство $t + 1/t \geq 2$.

1208. (7–90) Если $h_n = \sin \alpha$, то $h_{n+1} = \sin(\alpha/2)$.

1209. (7–90) а) Для доказательства при «спуске» нужно рассматривать соотношение в (наклонном) квадрате 3×3 . б) Иначе найдутся две пары диагоналей – строк и столбцов, в пересечении которых стоят пары равных чисел. Но среди четырех чисел в любом таком пересечении для нашей таблицы произведение верхнего числа на нижнее больше произведения двух других.

1210. (7–90) Начинаящий выигрывает: а) при $k = 2$ – если M не делится на 4; б) при $k = 5$ – если M не делится на 8. (При произвольном k – если M не делится на $4[k/2]$.)

1211. (8–90) Да.

1212. (8–90) а) Нет; б) может.

1213. (8–90) Рассмотрите цепочки параллелограммов, идущие от одной стороны шестиугольника к противоположной (постоянной ширины). Каждый параллелограмм входит в две такие цепочки.

1214. (8–90) Можно рассмотреть таблички, в которых звездочки заменены числами $1/k$, где k — число звездочек в соответствующем столбце (строке).

1216. (9–90) 60° , 45° , 75° ; рассмотрите описанную окружность.

1217. (9–90) Можно раскрыть скобки и сосчитать количество членов $1/(kl)$, а можно выделить члены с $1/n$ и действовать по индукции.

1218. (9–90) Эта точка — центр гомотетии дуг AKB и BMC . (Существует решение, использующее инверсию.)

1219. (9–90) Нужно, используя неравенство Бернулли, доказать сначала, что (при $x > 0$, $0 < y < 1$) $x^y > x/(x+y)$.

1220. (9–90) Одно из решений опирается на такую комбинаторную интерпретацию задачи: b_n — число разбиений окружности, поделенной на n равных дуг, на части, состоящие из двух или трех соседних дуг.

1221. (10–90) Рассмотрите точку, симметричную вершине C относительно медианы AD треугольника ABC .

1222. (10–90) а) Рассмотрите остатки по модулю m всех подсумм данных $s+1$ чисел. б) Примером служит набор степеней 2 (от 1 до 2^{s-1}).

1223. (10–90) Оцените площади через проекции на стороны квадрата.

1224. (10–90) а), в) Нет; б) да.

1225. (10–90) Если уравнение $x^2 - qxy + y^2 + q = 0$ (относительно x) имеет целый корень x_0 , то оно имеет также целый корень $qy - x_0$.

1227. (11–90) Рассмотрите турнир с данным итоговым распределением, имеющий наибольшее число ничьих.

1228. (11–90) Левая часть, как функция от a (где $a \leq b \leq c$), выпукла вниз.

1230. (11–90) Рассмотрите цепочку квадратов 25×25 , получающихся сдвигом на 1, крайние из которых имеют суммы разных знаков.

1231. (12–90) $n^2 + 1$.

1232. (12–90) а) $p + q - 1$; б) $p + q - d$.

1233. (12–90) Можно доказать, подсчитав отношения отрезков, что CP и CQ пересекают сторону AB на равных расстояниях от концов. А можно выйти в пространство: провести новую плоскость p через AB и рассмотреть проекцию нашей плоскости на p из центра O , удаленного от p на то же расстояние, что и CD .

1234. (12–90) а), б) Да.

1235. (12–90) б), в) Можно представить эту разность как многочлен от p^2 – сумму $q + 1$ членов вида $(-1)^k S_k p^{2q-2k}$, $k = 0, 1, \dots, q$, где S_k – сумма произведений по k квадратов нечетных чисел от 1 до $2q - 1$.

1236. (1–91) Это – восьмиугольная «снежинка», ограниченная параболами.

1237. (1–91) Докажите эквивалентное неравенство $S \leq (a^2 + b^2 + c^2) / (4\sqrt{3})$ между площадью S и сторонами a, b, c треугольника.

1238. (1–91) Нет.

1240. (1–91) Можно сопоставить любому множеству n точек с различными координатами (x_i, y_i) в квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ пару объектов: «ломаная, расстановка звездочек (в клетках разных строк и столбцов)» так, чтобы условие « j -я звездочка лежит под ломаной» выполнялось тогда и только тогда, когда $y_j \geq x_j$. Можно также подсчитать (по индукции) число пар «ломаная, расстановка звездочек», в которых звездочки стоят ниже ломаной.

1241. (2–91) За 11. Проследите за количеством групп ящиков с равным числом камней.

1242. (2–91) Рассмотрите поворот вокруг E на угол π/n .

1243. (2–91) а) Может; б) может (первый ход – 0).

1245. (2–91) Рассмотрите треугольник наибольшей площади, вписанный в выпуклый n -угольник из данных векторов.

1246. (3–91) Рассмотрите члены вида $a + 10^n d$.

1247. (3–91) а) Можно; б) нельзя (рассмотрите окрестность наименьшего квадрата).

1248. (3–91) Полезно сначала «сократить» длины отрезков, сохранив положения середин.

1249. (3–91) а) Утверждение для $n > 7$ доказывается по индукции. б) Нет.

1251. (4–91) Точка M лежит на биссектрисе данного угла, отрезки PM и QM образуют равные углы со сторонами и биссектрисой. Можно действовать «поэтапным улучшением».

1252. (4–91) Рассмотрим циклические перестановки цифр.

1254. (4–91) Раскрасьте прямоугольник на черные и белые полосы.

1255. (4–91) Постройте параллелепипед, у которого четыремя несмежными вершинами являются вершины тетраэдра; рассмотрите сечения плоскостями симметрии параллелепипеда.

1256. (5–91) Докажите, что угол трапеции равен $\pi/4$.

1257. (5–91) Предположите противное и воспользуйтесь китайской теоремой об остатках.

1258. (12–91) а) Можно.

1259. (5–91) Наименьшее k равно $n - 1$, если $n - 2$ кратно 3, и равно n в других случаях. (Разбейте точки на группы, делая шаги длины $n + 1$, т.е. переходя от очередной точки через n к следующей.)

1260. (5–91) Единственное число: $n = 3$. Полезно использовать малую теорему Ферма.

1262. (6–91) Удобно записать стороны через отрезки касательных: $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

1264. (6–91) Нельзя. Существует раскраска в два цвета – белый и черный, при которой каждый квадрат 3×3 и 4×4 имеет четное число белых клеток, а некоторый квадрат 2×2 – нечетное число.

1265. (6–91) б) 9.

1266. (7–91) Подсчитайте число возможных значений площади треугольника (здесь полезна формула Пика $S = i + r/2 - 1$ для площади многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги: i – число узлов внутри, r – на границе).

1267. (7–91) Для всех k (кроме, быть может, одного) разности $r_{k+1} - r_k$ различны.

1268. (7–91) Произведения двух троек отрезков на сторонах (взятых через один) равны.

1269. (7–91) Рассмотрите окружность с диаметром AL .

1270. (7–91) Это число разлагается на два множителя.

1271. (8–91) Постройте на AB точку P такую, что

$$AP^2 = AB \cdot BP.$$

1272. (8–91) Попробуйте сближать две точки $a_i < 1/n < a_j$.

1273. (8–91) Если три точки движутся по плоскости прямолинейно и равномерно, то площадь (с учетом ориентации) выражается квадратным трехчленом от времени.

1274. (8–91) Оцените разность «хвостов» двух дробей, начинающихся с k (по k от $n - 1$ до 1).

1276. (9–91) Точка C и ортоцентр треугольника ABC движутся по фиксированной окружности.

1277. (9–91) Воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим сначала для двух, а затем – для n чисел.

1278. (9–91) Если все x_i заключены на отрезке $[a; b]$, где $a < 0 < b$, то каждое из чисел $(x_i - a)(x_i - b)$ не больше 0.

1279. (9–91) Рассмотрите два самых далеких квадрата (в направлении, параллельном одной из сторон, которое считаем горизонтальным). Разберите два случая: когда над (или под) одним из них есть квадрат и когда такого квадрата нет.

1280. (9–91) Докажите, используя разложение $10^{3^{m+1}} - 1 = (10^{3^m} - 1)(10^{3^m \cdot 2} + 10^{3^m} + 1)$, что длина периода десятичной дроби $1/3^n$ равна 3^{n-2} . При этом все остатки (при делении 1 на 3^n столбиком) – это числа вида $9q + 1$. Одно из таких чисел содержит любой набор 20 (даже 45) цифр в нужном порядке.

1281. (10–91) Это следует из неравенств вида $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2xy}{x+y}$ и т.п.

1282. (10–91) В трапеции разность боковых сторон меньше разности оснований.

1285. (10–91) Точный ответ: $M(n) = [n/2] + 1$, где $[x]$ – целая часть x .

1286. (11–91) Надо доказать аналогичные утверждения для $2n$ делегатов по индукции (для $n = 2$ оно проверяется без труда).

1287. (11–91) Достаточно проверить равенство вписанных углов $\angle MBD$ и $\angle MAB$.

1288. (11–91) Это число двумя способами представляется в виде суммы двух квадратов.

1289. (11–91) Рассмотрите пары точек A_k, A_i (точки занумерованы по часовой стрелке), для которых сумма $a_k + a_{k+1} + \dots + a_{j-1}$ положительна. Выразите N_k через число пар, в которые входит A_k .

1290. (11–91) 15; рассмотрите последнее складывание.

1291. (1–92) а) Рассмотрите биссектрисы треугольника $A_2A_4A_8$, вписанного в правильный 12-угольник $A_1A_2\dots A_{12}$.

1292. (1–92) $k = 1991$.

1294. (1–92) Рассмотрите разбиение куба на кубы $2 \times 2 \times 2$ и покажите, что черных кубиков $1 \times 1 \times 1$ каждого «типа» (определяемого положением кубика в кубе $2 \times 2 \times 2$) удалено поровну.

1295. (1–92) Рассмотрите для каждого квадрата 2×2 последнюю погасшую в нем клетку.

1296. (2–92) Нельзя (сохраняются периметр и площадь).

1297. (2–92) $\alpha + \beta = 2$.

1298. (2–92) 26 билетов.

1299. (2–92) Сумма обратных величин к числам, записанным на доске, не увеличивается.

1300. (2–92) Можно после серии из нескольких вопросов задавать контрольный вопрос: все ли ответы в серии верны?

1301. (3–92) а), б), в) Нет.

1302. (3–92) Это можно доказать по индукции, взяв производную многочлена $P(x)(x+1)^n$.

1303. (3–92) Таких последовательностей девять; все они имеют период 4.

1304. (3–92) Проще всего выразить расстояния IA , IB , IC через радиус r вписанной окружности и углы; дело сводится к неравенству $R \geq 2r$.

1305. (3–92) Рассмотрите многочлен

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - (x + b_1)(x + b_2) \dots (x + b_n).$$

1307. (4–92) Индукция, основанная на равенстве

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

1308. (4–92) В общем случае (если углы между прямыми равны 60°) – пара параллельных прямых. В особых случаях – точка и прямая (а если все три угла по 60° – одна точка или, если прямые проходят через одну точку, – вся плоскость).

1309. (4–92) Это множество имеет «фрактальную» структуру (см. статью Н.Долбилина «Игра «Хаос» и фракталы», 4–97); оно «почти» покрывается 3^k треугольниками, гомотетичными исходному, площадью $S/4^k$ каждый, где S – площадь исходного треугольника.

1310. (12–92) Это доказывается индукцией по k (используя прием «деления пополам»): за k дней можно слить две группы по 2^{k-1} боксеров, упорядоченных ранее.

1311. (5–92) Докажите, что $xy - xz - yz = 0$.

1312. (5–92) Докажите сначала для количества C , K , B клеток синего, красного и белого цветов неравенства $C \leq 3B$ и $C \leq B + 4K$ (и аналогичные – для других пар цветов).

1313. (5–92) $a_k = (2k+1)^2$ при $k = 1, 2, \dots, 8$.

1314. (5–92) Опустите перпендикуляры PM , QN на биссектрису угла между AC и BD и докажите, что даже $4MN > AB + CD$.

1315. (5–92) Можно рассмотреть «альтернированную сумму» $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{k-1} - a_k$ длин серий единиц.

1316. (6–92) Отметьте на окружности длины 10^k , катящейся

по числовой оси, точки, в которые попадают члены прогрессии, и изучите интервалы между возникающими на окружности отпечатками. Если цифра c отсутствует в k -м разряде, то на некоторой дуге (от $c \cdot 10^{k-1}$ до $(c+1) \cdot 10^{k-1}$) не появится ни одного отпечатка. Оценки 72 и 80 – точные.

1317. (6–92) Произведение данных трех отношений равно $(a+b)(b+c)(c+a)/(a+b+c)^3$, где a, b, c – стороны треугольника. Правое неравенство следует из неравенства Коши. Для доказательства левого полезно рассмотреть многочлен с корнями a, b, c .

1318. (6–92) Попробуйте нумеровать ребра, выходящие из одной вершины, затем из соседней, и так далее числами 1, 2, ... подряд.

1319. (6–92) Рассмотрите множество точек M , для которых $\angle MAB = \angle MBC = 30^\circ$.

1320. (6–92) Последовательность $x_n = n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}]$ гонится даже для $\alpha = 1$.

1321. (7–92) Рассмотрите сначала случай, когда на каждой из горизонталей есть отрезок траектории ладьи.

1322. (7–92) а), б), в) Да; г) нет.

1323. (7–92) Функция $f(t) = 2^t$ выпукла, и потому хорда на отрезке $-x \leq t \leq y$ лежит выше ее графика.

1324. (7–92) Можно использовать малую теорему Ферма (перейдя от $k^2 + k + 1$ к $k^3 - 1$) или действовать «спуском», заменив k на $k - q$, где q – наименьший делитель $k^2 + k + 1$ вида $6t - 1$.

1325. (7–92) Удобно использовать комплексные корни из 1.

1326. (8–92) Докажите, что если $a_k = p_k \cdot 10^m - 1$, то a_{k+1} имеет вид $p_{k+1} \cdot 10^{2m} - 1$.

1327. (8–92) Можно рассмотреть композицию двух поворотов: первый – вокруг C на угол BCA и второй – с центром E на угол AED .

1328. (8–92) Используйте многочлен $P(x) = 4x^3 - 3x + 1$ при $x = x_i$ или нанесите на график функции $y = x^3$ n точек с абсциссами x_i и рассмотрите их центр тяжести.

1330. (11–92) См. статью А. Канеля и А. Ковальджи «Треугольники и катастрофы».

1331. (9–92) Рассмотрите сумму площадей треугольников ABK, BCM, CDN, DAL .

1332. (9–92) 6.

1333. (9–92) Можно изучить функцию от двух переменных $u = a/c$, $v = b/c$, рассматривая ее на границе нужной области и на некоторых отрезках. Другой способ – перейти к новым переменным (x, y, z) : $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.

1334. (9–92) Нет. (Так же, как и для любого простого p вида $4k + 3$. Этот факт близок к теореме Вильсона: если p – простое, то $(p - 1)! + 1$ делится на p .)

1335. (9–92) а) При $1 \leq n \leq 10$, $n = 12$, $n = 18$; б) при $n \leq m$ и при $m/n = (k - 1)/k$ при целом k . Можно (по индукции) доказать, что все кусочки кратны минимальному.

1336. (10–92) Это, по существу, вариант неравенства Бернулли $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$ при $0 < \alpha < 1$, $x > 0$.

1337. (10–92) Решите сначала задачу для квадрата (подсчетами или «перекладыванием» кусочков). Около любой фигуры можно описать квадрат с теми же осями симметрии.

1338. (10–92) Используйте формулы $f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2$ и $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$ для последовательности Фибоначчи (см. указание к задаче 1053).

1339. (10–92) Проведите через конец биссектрисы отрезок, ей перпендикулярный, и сравните площади возникших треугольников.

1340. (10–92) а) 86; б) 5960. Можно по индукции доказать для числа частей формулу $3N - 6 - \lceil \log_2(N - 1) \rceil$.

1341. (11–92) Первое (доказывается по индукции).

1342. (11–92) Проследите за номерами ячеек, занимаемых числами. Они вернутся на место не более чем через $n - 1$ шагов.

1343. (11–92) Рассмотрите гомотетии, переводящие большую окружность в одну из трех меньших, а те, в свою очередь, – в окружность, вписанную в $\triangle ABC$.

1344. (3/4–93) а), б) Да; в) нет. Рассмотрите площади досок, предшествующих неокрашенным.

1345. (11–92) Можно доказать, что треугольник, у которого сумма радиусов-векторов, идущих из центра описанной окружности к вершинам, равна нулевому вектору, – правильный.

1346. (12–92) Подсчитайте сумму углов поворота векторов и оцените отношение площади сектора и соответствующего треугольника.

1347. (12–92) 8. Рассмотрите цепочку монет, в которой чередуются золотые, начиная с самых тяжелых, и серебряные, начиная с самых легких.

1348. (12–92) Проследите за изменением «направленных» углов при движении P по окружности. Условие, что прямые

AA' , BB' , CC' пройдут через одну точку, лежащую на описанной окружности, с «направленными» углами можно записать так: $\angle(AA', BB') = -\angle(AB, BC)$ и так далее.

1349. (12–92) При каждом преобразовании сумма расстояний между n фишками (можно считать, что они лежат на прямой) не меняется или увеличивается на 2.

1350. (12–92) Доказывая это индукцией по n (для любого b), полезно выделить разложения на сомножители, каждый из которых больше $b + 1$.

1353. (12–92) Удобно использовать неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим.

1354. (12–92) С помощью псевдоскалярного произведения векторов можно доказать, что алгебраическая сумма всех 27 площадей треугольников равна 0.

1355. (1/2–93) Одно из решений основано на двух леммах:
(1) $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$ при n не кратном 3 и
(2) $2^{3^t} + 1$ делится на 3^{t+1} при $t \geq 0$. Другие решения используют малую теорему Ферма.

1356. (1/2–93) Условие задачи эквивалентно тому, что r_c равно полупериметру.

1357. (1/2–93) Используйте теорему Вильсона (см. указание к задаче 1334; в общем случае, при простом p , $(p-k)!k! + (-1)^k \equiv 0$ по модулю p).

1358. (1/2–93) У такого кубоида четверки ребер, которые у обычного куба параллельны, пересекаются в одной точке (или тоже параллельны). Он проективно эквивалентен кубу.

1359. (1/2–93) Одно из решений: умножить данную функцию на $\sin(x/2)$ и доказать, что f имеет 0 между соседними экстремумами функции $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$.

1360. (1/2–93) В оценке сверху п. б) можно использовать п. а).

1361. (3/4–93) Треугольник CMN подобен треугольнику ABC , причем $CK = KM = KN$; точки C , M , N , P и Q лежат на окружности диаметра $PQ = r\sqrt{2}$.

1362. (3/4–93) Предположите противное и используйте тот факт, что $a^m - 1$ делится на 10^k для любого k (при некотором m).

1363. (3/4–93) а), б), в) Да. Однако примеры строятся по-разному для разных n (сложнее случай составного числа $2n + 1$).

1364. (3/4–93) Из симметрии и изучения «сечений» нашей функции на некоторых отрезках можно показать, что минимум достигается лишь в вершинах треугольника $a + b + c = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, либо в середине сторон, либо в центре.

1365. (3/4–93) Нет.

1366. (9/10–93) Это равенство эквивалентно таким:

$$S_{ABCM} = S_{BCDN}, S_{ABNE} = S_{AEDM}.$$

1367. (9/10–93) Можно взять две компании, осуществляющие $k + 1 + s$ и $k + 1 - s$ рейсов, и, выбрав цепочку, на которой у первой на 1 рейс больше, поменять в ней компании. Повторение такой процедуры «улучшения» приведет к нужному результату.

1368. (9/10–93) Это можно доказать с помощью векторов.

1369. (9/10–93) Умножая уравнения на c , a , b и складывая, а затем – на zx , xy , yz и вычитая, получим $xy = a$, $yz = b$, $zx = c$.

1370. (9/10–93) При $n = 8$. Удобнее всего оценивать количество возможных разностей. Точные (асимптотические) оценки при больших n неизвестны.

1371. (9/10–93) Треугольник APB равен треугольнику $AP'B$. Можно также использовать композицию симметрий (но в данной задаче это «из пушки по воробьям»).

1372. (9/10–93) Можно сложить и вычесть исходные уравнения, а затем ввести переменные $x + y = u$, $xy = v$.

1373. (9/10–93) Заметьте, что BA – биссектриса между BX и BY .

1374. (9/10–93) Только $k = 3$ ($m = 3$, $n = 4$).

1375. (9/10–93) а) Можно «улучшить» распределение, пересадив часть зрителей по цепочке; б) 1.

1376. (9/10–93) 33.

1377. (9/10–93) Рассмотрите гомотегию с центром P , переводящую вписанную окружность треугольника PQR во вневписанную. Ответ: луч с началом в точке вписанной окружности, диаметрально противоположной точке касания этой окружности с прямой l , параллельный прямой, проведенной через центр окружности и середину отрезка QR .

1378. (9/10–93) Можно доказать это индукцией, разбив S на два множества плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей.

1379. (9/10–93) а) 13 не равно сумме чисел вида $x^2 - 1$, где x целое; б), в) $n = 13$ и, вообще, $n = 2^k \cdot 13$, а также $n = 2^k \cdot 17$ и др.

1380. (9/10–93) Воспользуйтесь тождеством

$$(x^5 - 1)/(x - 1) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x + 1)^2.$$

1381. (11/12–93) Предположив противное, подсчитайте сумму по модулю $2n$ номеров начальных и конечных точек $2n$ -звенной ломаной.

1382. (11/12–93) В решении а) помогает правильный шестиугольник, в решении б) – правильный семиугольник.

1383. (11/12–93) Одно из решений: центр масс точек: а) (x_i, x_i^2) ; б) (x_i, x_i^4) расположен, из-за выпуклости вниз графиков $y = x^2$ и $y = x^4$, ниже отрезка, соединяющего крайние точки дуги, на которой лежат эти точки (соответствующие абсциссам m и M).

1385. (11/12–93) Построить наименее уклоняющийся от данного треугольника правильный треугольник $A_1B_1C_1$ помогают такие соображения: центры тяжести этих треугольников должны совпадать; если (поворотами вокруг M на 120°) провести векторы $\vec{A_1A}$, $\vec{B_1B}$ к общему началу C_1 – пусть их образы $\vec{C_1P}$ и $\vec{C_1Q}$, – то C_1 должна быть помещена в точке, сумма квадратов расстояний от которой до P , Q и C минимальна.

1386. (1–94) Рассмотрим одноцветные пары клеток, расположенные в одной строке; в каждой строке их не менее 9. Из таких пар (их не менее 63) можно выбрать не менее чем 21 пару, соответствующую одним и тем же столбцам.

1387. (1–94) $3/4$. Кроме решений с подобными треугольниками, синусами и площадями, у задачи есть и красивые решения в духе проективной геометрии.

1388. (1–94) 37.

1389. (1–94) Пусть во взводе $2n$ (или $2n + 1$) сержантов, x рядовых, подчиненных одному, и y – двум сержантам. Подсчитайте число случаев увольнения, удовлетворяющих условиям задачи, и суммарное число уволенных при этом рядовых (при том что остаются не уволенными не менее половины рядовых и n сержантов).

1390. (1–94) Нет, неверно. В качестве контрпримера можно взять большое количество тесно расположенных кругов.

1391. (2–94) Постройте точку A_0 описанной окружности ΔBCA_1 , диаметрально противоположную A_1 , и аналогично – B_0 и C_0 . Тогда $AA_2 \perp B_0C_0$, и прямая AA_2 состоит из точек, разность квадратов расстояний от которых до B_0 и C_0 равна

$AB_0^2 - AC_0^2$. Можно также использовать векторы и псевдоскалярное произведение.

1392. (2–94) Если углы $\angle CBD = \gamma$ и $\angle BCA = \beta$ отсчитывать в одном направлении, то преобразование можно записать так: $(\beta, \gamma) \rightarrow (\gamma - \beta, \gamma)$.

1393. (2–94) $k = 3$ (если $m \geq n > 1$). Для доказательства удобно использовать теорему Холла о различных представителях («теорему о сватовстве»).

1394. (2–94) а) 66; б) можно привести пример с 98 ребрами, пересеченными плоскостью; в) проследите, какие «перестройки» происходят при параллельном переносе секущей плоскости.

1396. (2–94) Можно доказать неравенство по индукции. Оно справедливо не только для функции $f(x, y) = xy/(x + y)$, но и для любой выпуклой вверх функции $g = g(\vec{u})$ от вектора \vec{u} на плоскости, т.е. такой, что $g(\vec{u}) + g(\vec{v}) \leq 2g((\vec{u} + \vec{v})/2)$.

1397. (2–94) Рассмотрим «двойственную» карту: на каждой грани выберем столицу и через каждое ребро соединим соседние столицы дорогой. Дороги, пересекающие (слева направо) ребра, где находятся муравьи, образуют ориентированный граф; проверьте, что он имеет цикл, который (если нет столкновений) сужается.

1398. (2–94) Для каждой пары (a, b) рассмотрите тройку $(a, b), (c, a), (b, c)$, где $c = a * b$.

1399. (3–94) См. статью С.Гашкова «Легко ли складывать и умножать дроби»: а) 4 и 12; б) 15, 30, 60.

1400. (2–94) $2a\sqrt{10}/5$. Можно доказать (взяв «средний» путь между двумя симметричными), что вершины лежат на медианах граней.

1401. (3–94) Можно доказать, что сумма $1/AM + 1/AN$ постоянна.

1402. (3–94) Неравенство можно доказать индукцией по n .

1403. (3–94) Рассмотрите n треугольников, образуемых двумя соседними сторонами и диагональю данного n -угольника.

1404. (3–94) Рассмотрите функцию $s = xy + yz + zx$.

1405. (3–94) Если $f(x)$ – длина бокового ребра, следующего (по номеру) за ребром x , и аналогичное – для y , то $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

1406. (3–94) $(n + 1)/2$ уравнений.

1407. (3–94) а) 16; б) $[(3n + 1)/2] + 1$ при $n > 1$.

1408. (3–94) $F = 8$.

1409. (3–94) Раскрасьте вершины в три цвета и оставьте точки двух цветов (содержащих большее число из отмеченных); затем те же соображения примените к более крупной решетке и так далее.

1410. (2–94) См. статью Д.Терешина «Обращение принципа Кавальери».

1411. (4–94) Елкин.

1412. (4–94) Эти дроби – корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

1413. (4–94) Ломаную можно распрямить, рассмотрев точки, симметричные точке B относительно AM и точке C относительно MD .

1414. (4–94) Эти функции можно искать среди функций вида: а) $x/(ax+1)$; б) $(b+\sqrt{x})^2$.

1415. (4–94) Можно, разбив окружность на 99 равных дуг, разметить (на двух экземплярах) разбиения на 10 дуг, соответствующих заданным числам, и подсчитать число совпадений отметок при наложениях одного экземпляра на другой.

1417. (4–94) Да (во всех случаях).

1418. (4–94) Рассмотрите ломаную, образуемую векторами в порядке убывания абсцисс, и ее пересечения с семейством прямых, параллельных оси ординат.

1419. (4–94) Предположив, что

$$x^n + 5x^{n-1} + 3 = (x^m + \dots + b_1x \pm 3)(x^{n-m} + \dots + c_1x \pm 1),$$

рассмотрите наименьшее i , для которого b_i не делится на 3.

1420. (4–94) Рассмотрите карту линий уровня функции $X \rightarrow m(XPQ)$ на плоскости при фиксированных точках P и Q (т.е. линий, где m имеет постоянное значение.)

1421. (5–94) Рассмотрите ломаную $BMND$, где M – середина EF , N – середина LK .

1422. (5–94) Эти числа можно записать как «многочлены» от $a = 50$ и $a = 20$.

1423. (5–94) Да.

1424. (5–94) б) 10.

1426. (5–94) Да. Исходя из двух таких чисел a , b , можно построить три (вида $10^k + a$, $10^k + b$, $10^k - c$).

1427. (5–94) а), б), в) Да.

1428. (5–94) Нет.

1429. (5–94) Оцените «средний» угол.

1430. (5–94) а) Можно доказать цепочкой оценок; б) можно доказать индукцией сразу от n к $n(n-1)$.

1431. (6–94) Рассмотрите эти числа по модулю 13.

1432. (6–94) Можно доказать, что $b_{k+1} \geq b_k + 1$.

1433. (6–94) Направления сторон прямоугольника параллельны биссектрисам углов между противоположными сторонами.

1434. (6–94) Да.

1435. (6–94) Подставьте $Q(x) = x + P(x)$.

1436. (6–94) а) $\sqrt{3}/12$; б) $1/8$; в) $\sqrt{2}/12$.

1437. (6–94) Биномиальный коэффициент C_p^k (при простом k) делится на p . Можно использовать представление $a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \alpha_3 \lambda_3^n$, где λ_i – корни уравнения $\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$.

1438. (6–94) Используйте формулу для суммы делителей.

1439. (6–94) Можно вначале свести дело к случаю $b = c$. Заметим, что из а) можно вывести б) и обратно (медианы треугольника T_2 , составленного из медиан треугольника T_1 , пропорциональны сторонам T_1).

1440. (6–94) Операциями, указанными в условии, можно сокращать число «уголков» – ситуаций, когда в верхнюю клетку вертикальной плитки справа упирается горизонтальная.

1441. (1–95) Можно рассмотреть ситуацию «с конца».

1442. (1–95) Подсчитайте величины дуг, стягиваемых хордами AP и AN , AQ и AM , и докажите, что

$$\Delta MAP = \Delta QAN.$$

1443. (1–95) а) Постройте графики функций $f(f(f \dots (x)))$ (где f повторено n раз, $n = 2, 3, \dots$): это кусочно-линейные функции с рациональными коэффициентами. б) Более интересно выяснить вопрос, сколько существует периодических траекторий периода T .

1444. (1–95) Да.

1445. (1–95) 180625.

1446. (1–95) Рассмотрите гомотетию с коэффициентом 2 и с центром A и оцените объем полученного многогранника.

1447. (1–95) а) Для каждого из кораблей 1×3 , 1×2 и (последнего) 1×1 можно придумать разбиение квадрата на прямоугольники такое, что при любой расстановке предыдущих кораблей один из прямоугольников свободен.

1448. (1–95) а) Нет. б) Можно, двигая хорду, параллельную выбранному направлению, и перестраивая ее в точках, где одна из точек оказывается «невыпуклой» вершиной, увеличивать

меньшую из площадей, отделяемых хордой, при этом не перескакивая от значений, меньших $1/3$ площади фигуры, сразу к значениям, большим $2/3$.

1449. (1–95) Рассмотрите четыре линейные функции на плоскости Oxy , выражающие расстояния от точки (x, y) до прямых AB , BC , CD , DA (в полуплоскости, не содержащей четырехугольник, – со знаком «минус»).

1450. (1–95) Докажите, что $b_k = 4^{5^{k-1}} + 1$ делится на 5^k , и рассмотрите числа $2^k b_k$, $k = 1, 2, \dots$

Задачник «Кванта»

Математика

Часть 2

Под редакцией Н.Б.Васильева

Библиотечка «Квант». Выпуск 95

Приложение к журналу «Квант» №3/2006

Редактор *В.А.Тихомирова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 80

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская.

Печать офсетная. Объем 4,5 печ.л. Тираж 3800 экз.

Заказ № **1587**.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Тел./факс: (501)443-92-17, (272)6-25-36,

E-mail: marketing@chpk.ru

**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ
СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

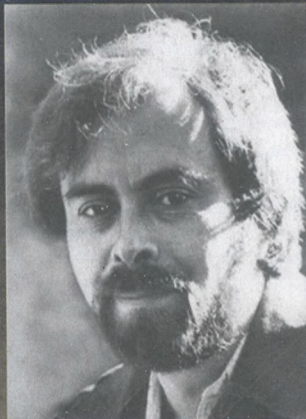
1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками
34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков*. Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов*. Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин*. Как превращаются вещества

37. Г.С.Воронов. Штурм термоядерной крепости
38. А.Д.Чернин. Звезды и физика
39. В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев. Удивительная гравитация
40. С.С.Хилькевич. Физика вокруг нас
41. Г.А.Звенигородский. Первые уроки программирования
42. Л.В.Тарасов. Лазеры: действительность и надежды
43. О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов. Международные физические олимпиады школьников
44. Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский. Математика и спорт
45. Л.Б.Окунь. $\alpha\beta\gamma\dots Z$: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. Я.Е.Гегузин. Пузыри
47. Л.С.Марочник. Свидание с кометой
48. А.Т.Филиппов. Многоликий солитон
49. К.Ю.Богданов. Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. Х.Рачлис. Физика в ванне
52. В.М.Липунов. В мире двойных звезд
53. И.К.Кикоин. Рассказы о физике и физиках
54. Л.С.Понтрягин. Обобщения чисел
55. И.Д.Данилов. Секреты программируемого микрокалькулятора
56. В.М.Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах
57. А.А.Силин. Трение и мы
58. Л.А.Ашкинази. Вакуум для науки и техники
59. А.Д.Чернин. Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. М.Б.Балк, В.Г.Болтянский. Геометрия масс
62. Р.Фейнман. Характер физических законов
63. Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов. Удивительная физика
64. А.Н.Колмогоров. Математика – наука и профессия
65. М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин. Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. Р.Фейнман. КЭД – странная теория света и вещества
67. Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов. Драма идей в познании природы
68. И.Д.Новиков. Как взорвалась Вселенная
69. М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева. Электричество в живых организмах
70. А.Л.Стасенко. Физика полета
71. А.С.Штейнберг. Репортаж из мира сплавов
72. В.Р.Полищук. Как исследуют вещества
73. Л.Кэрролл. Логическая игра
74. А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов. Физика в мире полимеров
75. А.Б.Мигдал. Квантовая физика для больших и маленьких
76. В.С.Гетман. Внуки Солнца
77. Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков. Математические бильярды
78. В.Е.Белонучкин. Кеплер, Ньютон и все-все-все...

79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак*. Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хонъек, К.Райли*. Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1. Под редакцией Н.Б.Васильева
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы



Библиотечка КВАНТ



Николай Борисович Васильев (1940 – 1998) окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, работал в Лаборатории математических методов в биологии МГУ. Будучи великолепно образованным математиком, тонко чувствуя красоту этой науки, он внес неоценимый вклад в дело математического просвещения в России. Н.Б.Васильев активно участвовал в работе школьных математических кружков при МГУ, входил в состав жюри и оргкомитетов Московских, Всероссийских и Всесоюзных математических

олимпиад, он был одним из организаторов ОЛ ВЗМШ – знаменитой заочной школы, инициатором возрождения сборников “Математическое просвещение”.

Имя Н.Б.Васильева неразрывно связано с историей журнала “Квант”. Он основал один из важнейших разделов этого журнала – “Задачник “Кванта” – и руководил им в течение почти тридцати лет. Придуманные им оригинальные и красивые задачи выделяются отточенностью формулировок и решений, глубиной и связью с “большой” математикой. Вместе с тем, он уделял много сил и внимания молодым, начинающим авторам, помогая найти наиболее привлекательную формулировку, обнаружить возможные обобщения и дальнейшее развитие сюжета задачи. Разумеется, работа Н.Б.Васильева в “Кванте” не ограничивалась “Задачником”. Им написано более тридцати статей, без сомнения, входящих в число лучших научно-популярных публикаций.

ВЫПУСК

95